Lecciones populares de matemáticas

CURVAS MARAVILLOSAS

NUMEROS COMPLEJOS Y REPRESENTACIONES CONFORMES

FUNCIONES MARAVILLOSAS

A. I. Markushévich

Editorial MIR



Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

А. И. МАРКУШЕВИЧ

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ СИНУСЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

A. I. MARKUSHÉVICH

CURVAS MARAVILLOSAS

NÚMEROS COMPLEJOS Y REPRESENTACIONES CONFORMES

FUNCIONES MARAVILLOSAS

Segunda edición

EDITORIAL MIR
MOSCU

Primera edición 1977

Segunda edición 1984

На испанском языке

IMPRESO EN LA URSS.

INDICE

CURVAS MARAVILLOSAS

Introducción a la teoría de las funciones elípticas

Traducido del ruso por
Carlos Vega, Candidato a Doctor
en ciencias físico-matemáticas,
Catedrático de Matemáticas Superiores

PREFACIO

Este libro está destinado principalmente para los escolares y para todos los que estén interesados en ampliar sus conocimientos matemáticos adquiridos en la escuela. Se basa en una conferencia que dictó el autor a un grupo de alumnos moscovitas de séptimo y octavo grados.

Al preparar la publicación de la conferencia, el autor la ha ampliado un poco tratando de conservar el estilo accesible de la exposición. El complemento más esencial es el punto 13 en el que se trata de la elipse, la hipérbola y la parábola en tanto que secciones de una superficie cónica.

Con el fin de no aumentar el volumen del libro, las propiedades de las curvas se dan, en su mayoría, sin demostración aun cuando en muchos casos la demostración podría ser realizada en forma accesible para el lector.

El autor.

1. Las palabras «curva» o «curvo» se emplean a veces como adjetivos para describir lo que se aparta de la dirección recta.

Los matemáticos suelen emplear la palabra «curva» en calidad de substantivo como un sinónimo de línea curva. ¿Qué es una línea curva? ¿Cómo abarcar en una definición las curvas que se trazan con lápiz o pluma en el papel o con tiza en la pizarra y las curvas que describen una estrella fugaz o un cohete en cielo nocturno?

Aceptaremos la definición siguiente: *la curva* (o sea, la línea curva) *es la traza de un punto móvil.* En nuestros ejemplos, este punto es la punta del lápiz, el extremo de la tiza, un meteoro candente que atraviesa las capas superiores de la atmósfera o un cohete. Desde este punto de vista, la recta es un caso particular de la curva. Efectivamente, ¿acaso no puede ser rectilínea la traza de un punto móvil?

2. Un punto móvil efectivamente describe una recta si pasa de una posición a cualquier otra por el camino más corto. Para trazar la recta se utiliza la regla; si deslizamos un lápiz sobre su borde, la punta del lápiz dejará en el papel una traza rectilínea.

Si el punto se desplaza sobre un plano de forma que permanece constante su distancia a un punto fijo del mismo plano, describirá la circunferencia; basándose en esta propiedad de la circunferencia, se emplea para trazarla el compás.

La recta y la circunferencia son las curvas más sencillas y, a la vez, son las dos curvas más notables en cuanto a sus propiedades. La recta y la circunferencia son las curvas más familiares al lector. Pero que no piense que conoce a fondo todas las propiedades principales de las rectas y circunferencias. ¿Sabe, por ejemplo, que si los vértices de dos triángulos ABC y $A'B'C'$ se hallan sobre tres rectas que se cortan en un punto S (fig. 1),

los tres puntos M, K y L de intersección de los lados correspondientes AB y $A'B'$, BC y $B'C'$, AC y $A'C'$ de los triángulos deben estar sobre una misma recta?

El lector conoce, por supuesto, que el punto M describe una recta si se desplaza sobre el plano de forma que permanecen iguales sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 del mismo plano, o sea, si $MF_1 = MF_2$ (fig. 2). Pero, le será difícil, probablemente, explicar qué curva describirá el punto M si su distancia al punto

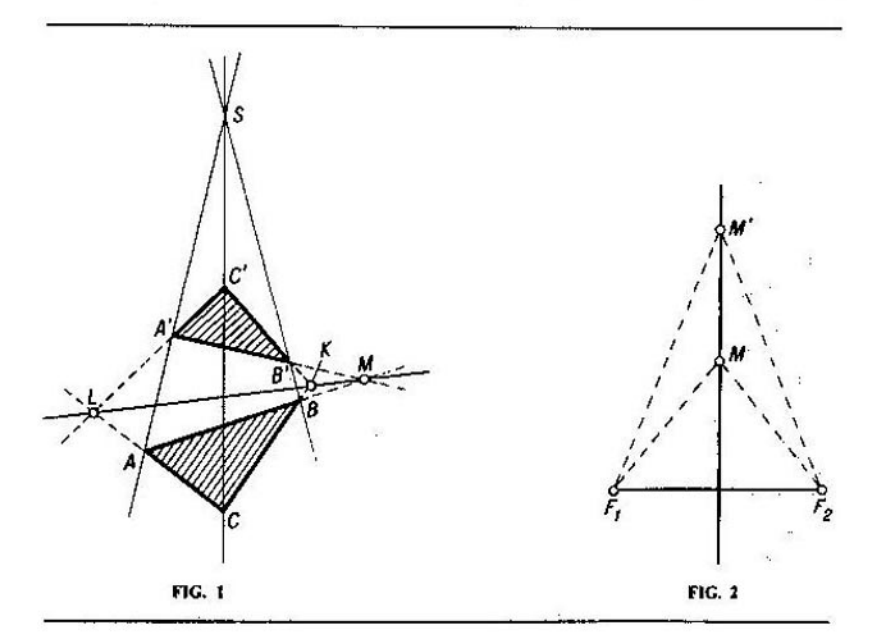


FIG. 1 FIG. 2

F_1 será un número determinado de veces mayor (por ejemplo, dos veces como en la fig. 3) que su distancia al punto F_2. Resulta que esta curva es la circunferencia. Por consiguiente, si el punto M se desplaza sobre el plano de modo que su distancia hasta uno de los dos puntos fijos F_1 y F_2 de éste es proporcional a su distancia hasta el otro punto:

$$MF_1 = k \cdot MF_2,$$

el punto M describe una recta (si el coeficiente de proporcionalidad k es igual a la unidad) o una circunferencia (si este coeficiente es distinto de la unidad).

3. Consideremos la curva que describe el punto M si permanece constante la suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2. Tomemos un hilo, atemos sus extremos a dos alfileres clavándolos en una hoja de papel de modo que el hilo quede libre. Si ahora estiramos el hilo mediante un lápiz colocado verticalmente y, manteniendo el hilo tirante, comenzamos a desplazar el lápiz

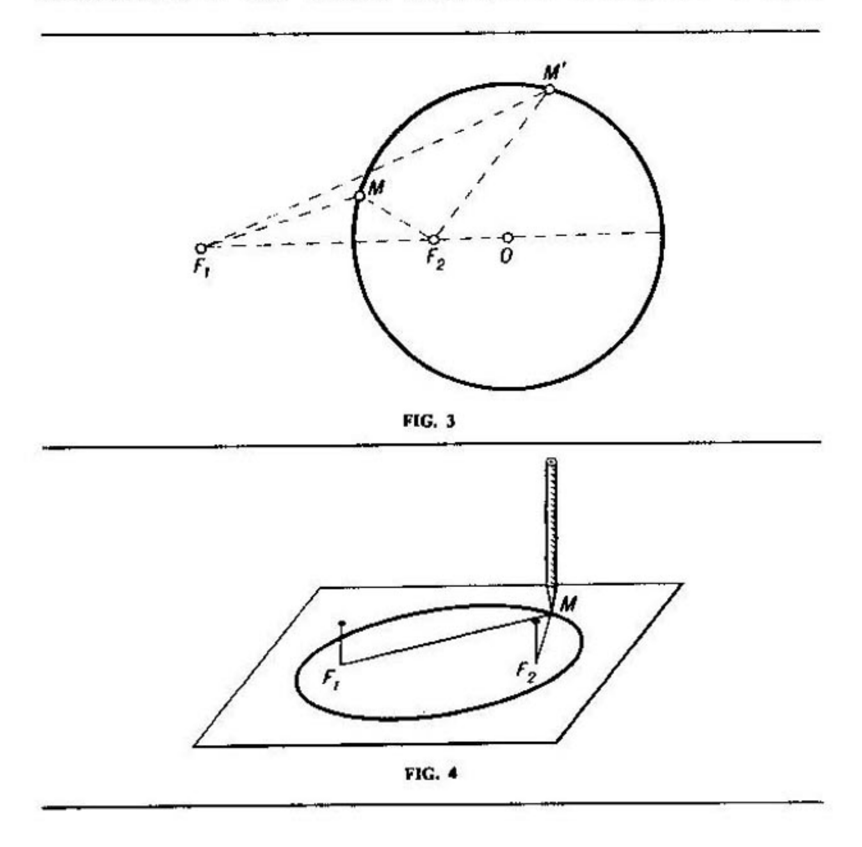


FIG. 3

FIG. 4

apretando levemente sobre el papel, su punta M (fig. 4) describirá una curva ovalada (semejante a un círculo achatado) que se denomina *elipse*.

Para obtener la elipse completa una vez trazada la mitad de la misma, habrá que pasar el hilo al otro lado respecto a los alfileres. Es evidente que la suma de las distancias de la punta M

del lápiz a las puntadas F_1 y F_2 permanece constante durante todo el tiempo: esta suma es igual a la longitud del hilo.

Las puntadas marcan en el papel dos puntos que se denominan focos de la elipse. Esto se justifica por la siguiente propiedad notable de la elipse.

Si encorvamos una franja estrecha metálica bien pulida dándole la forma de la elipse y colocamos en uno de los focos una fuente

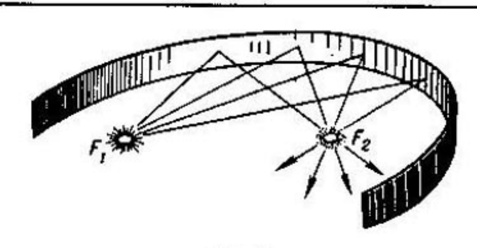


FIG. 5

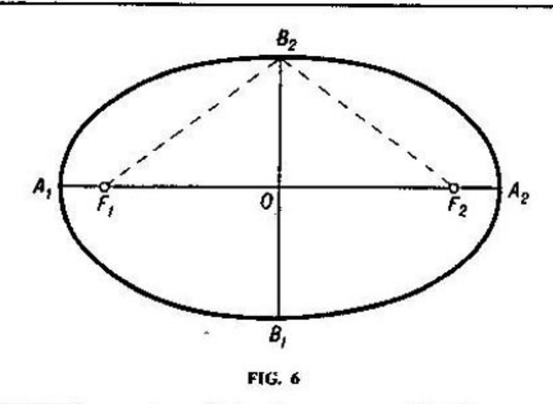


FIG. 6

de luz, sus rayos, después de reflejarse en la franja, se reunirán en el otro foco; por consiguiente, en este último también se verá una fuente de luz, imagen de la primera (fig. 5).

4. Si unimos los focos de la elipse mediante un segmento rectilíneo y después lo prolongamos hasta cortar la elipse, obtendremos el eje mayor A_1A_2 (fig. 6) de la misma. La elipse es una figura simétrica respecto a su eje mayor. Si dividimos por la mitad el segmento F_1F_2 y en su punto medio levantamos

una perpendicular, prolongándola hasta cortar la elipse, obtendremos el eje menor B_1B_2 de la elipse. También es un eje de simetría de la elipse. Los extremos de los ejes, o sea, los puntos A_1, A_2, B_1 y B_2, se denominan *vértices* de la elipse.

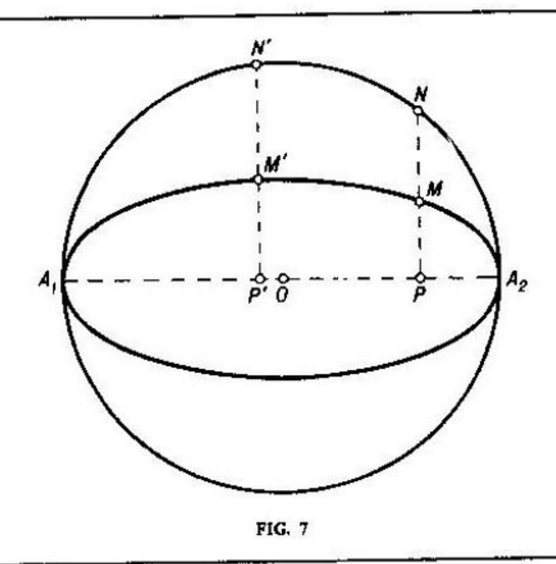


FIG. 7

La suma de las distancias del punto A_1 a los focos F_1 y F_2 debe ser igual a la longitud del hilo:

$$A_1F_1 + A_1F_2 = l.$$

Pero

$$A_1F_1 = A_2F_2$$

debido a la simetría de la elipse; por eso, podemos tomar A_2F_2 en lugar de A_1F_1 y así encontramos que

$$A_2F_2 + A_1F_2 = l.$$

Es obvio que en el primer miembro de esta igualdad figura la longitud del eje mayor de la elipse. Es decir, la longitud del eje mayor de la elipse es igual a la longitud del hilo o, en otras palabras, la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los focos es igual al eje mayor de esta elipse. Debido a la simetría de la elipse, de aquí resulta que la distancia entre el vértice B_2 (o B_1) y cualquiera de los focos es igual a la mitad de la longitud

del eje mayor. Por eso, dados los vértices de la elipse, es fácil encontrar sus focos: hay que determinar los puntos de intersección del eje mayor y del arco de la circunferencia cuyo centro es el punto B_2 y cuyo radio es igual a la mitad de A_1A_2.

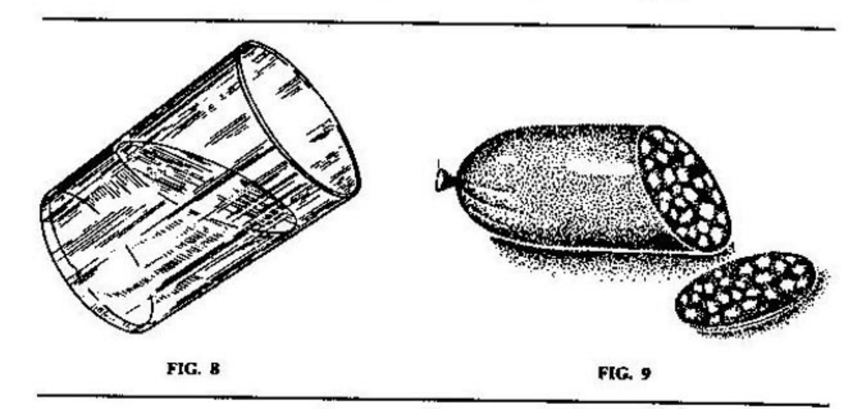


FIG. 8 FIG. 9

5. Consideremos la circunferencia que tiene como diámetro el eje mayor de la elipse (fig. 7). Desde un punto cualquiera N de la circunferencia bajemos sobre el eje mayor la perpendicular NP que cortará la elipse en un punto M. Es obvio que NP será un número determinado de veces mayor que MP. Si tomamos otro punto cualquiera N' de la circunferencia y realizamos esta misma construcción, resultará que $N'P'$ será mayor que $M'P'$ el mismo número de veces:

$$\frac{NP}{MP}=\frac{N'P'}{M'P'}.$$

En otras palabras, la elipse se puede obtener a partir de su circunferencia circunscrita: hay que acercar todos los puntos de la circunferencia al eje mayor de la elipse reduciendo un mismo número de veces sus distancias a este eje. Dicha propiedad ofrece un método sencillo para la construcción de la elipse: trazamos una circunferencia, tomamos un diámetro cualquiera de la misma y, a partir de los puntos de la circunferencia, construimos otros que se hallan en las perpendiculares al diámetro y que se encuentran más cerca de él en un número determinado $\left(1\frac{1}{2}, 2, 3, \text{etc. de veces}\right)$. Así obtendremos puntos de la elipse cuyo eje mayor coincide con

el diámetro de la circunferencia y cuyo eje menor es un número correspondiente $\left(1\frac{1}{2}, 2, 3, \text{etc.}\right)$ de veces menor que el diámetro.

6. En la vida frecuentemente tropezamos con elipses. Por ejemplo, si inclinamos un vaso de agua, la capa superior tendrá

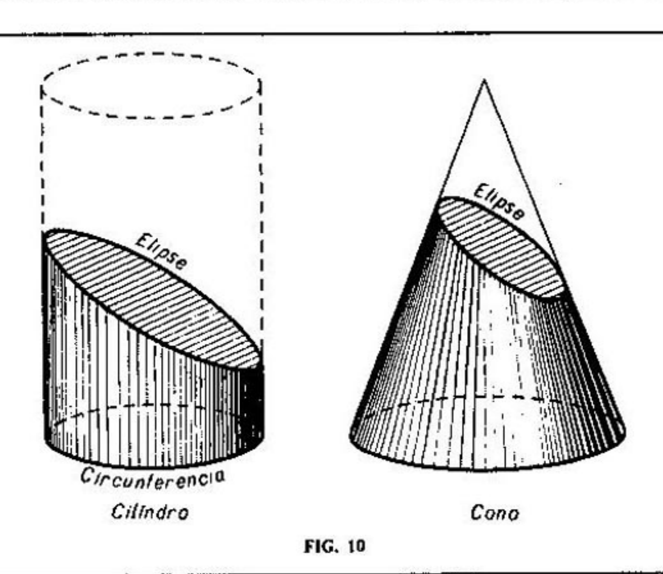


FIG. 10

la configuración de la elipse (fig. 8); de la misma forma, si cortamos un pedazo cilíndrico de salchichón inclinando el cuchillo, obtendremos rodajas en forma de elipse (fig. 9). En general, si un cilindro (o un cono) recto se corta mediante un plano inclinado (de modo que el plano no corte las bases), obtendremos como sección una elipse (fig. 10).

Fue Kepler (1571 – 1630) quien encontró que los planetas se mueven alrededor del Sol según unas elipses, y no círculos como se pensaba anteriormente, con la particularidad de que el Sol se halla en uno de los focos de cada elipse (fig. 11). Durante una revolución, todo planeta pasa una vez por el vértice A_1 de la elipse – más próximo al Sol – que se denomina *perihelio* y una vez por el vértice A_2 – más alejado del Sol – que se denomina *afelio*. Por ejemplo, la Tierra se encuentra en el perihelio cuando en el hemisferio boreal es invierno y en el afelio, cuando es verano.

La Tierra en su movimiento describe una elipse poco aplastada que, por su forma, se asemeja a la circunferencia.

7. En una hoja de papel tracemos una recta cualquiera D_1D_2, tomemos un punto F fuera de la misma y hagamos que la punta M del lápiz se desplazca de modo que en todo momento sean

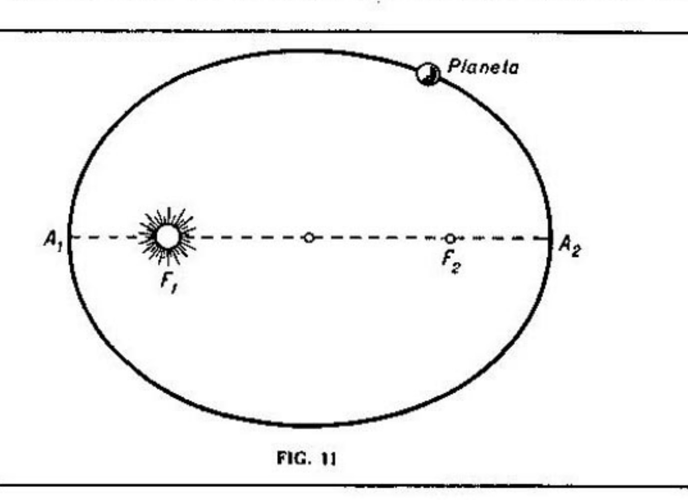


FIG. 11

iguales sus distancias a la recta y al punto F (fig. 12). Con este fin bastará sujetar, mediante una chinche, al vértice S de la escuadra un hilo de longitud igual al cateto SN y atar el extremo libre del hilo a un alfiler clavado en el punto F. Si hacemos ahora deslizar el otro cateto de la escuadra sobre una regla aplicada a D_1D_2, la punta M del lápiz, que estira el hilo y lo aprieta contra el cateto libre de la escuadra, estará a una misma distancia de la regla y del alfiler:

$$NM = MF.$$

La punta describirá en el papel una parte de la línea llamada *parábola*. Para obtener una porción mayor de esta curva, habrá que tomar una escuadra de cateto mayor y, en caso de necesidad, una regla más larga. La parábola consta de una rama que se extiende indefinidamente.

El punto F se denomina *foco* de la parábola; la perpendicular bajada desde el foco sobre la recta D_1D_2 (llamada *directriz*) y prolongada constituye el eje de simetría de la parábola y se denomina simplemente *eje* de la misma.

8. Si encorvamos una franja estrecha metálica bien pulida, dándole la forma de un arco de parábola, los rayos de una fuente de luz colocada en el foco, después de reflejarse en la franja, irán paralelamente al eje (fig. 13). Recíprocamente, si un haz de rayos paralelos al eje de la parábola incide sobre nuestra franja, los rayos se reunirán, después de reflejarse, en su foco.

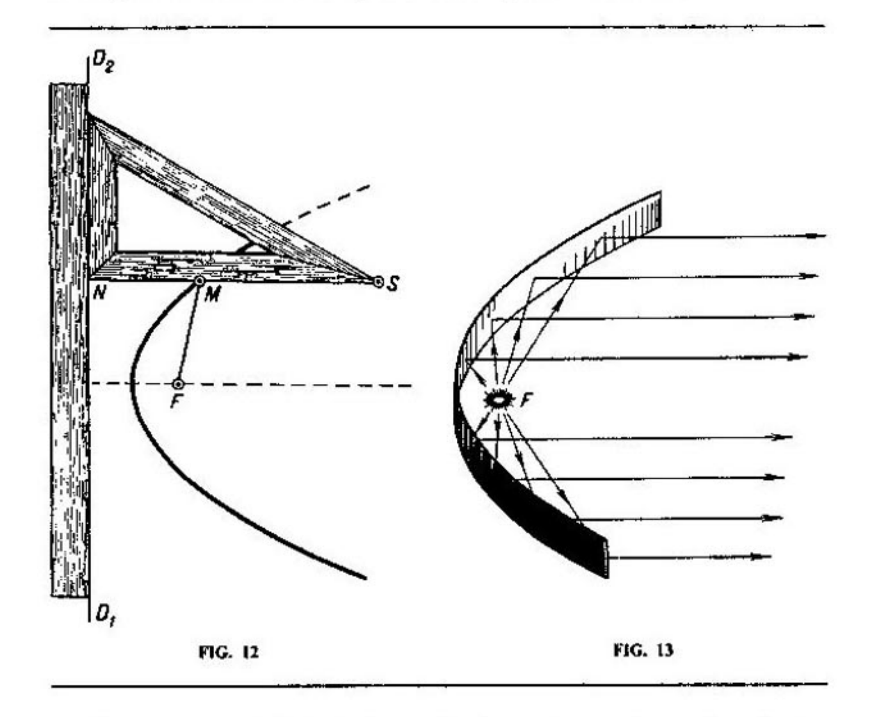


FIG. 12 FIG. 13

En esta propiedad de la parábola se basa el empleo de los espejos parabólicos en los faros de automóviles (fig. 14) y, en general, en los reflectores. En lugar de franjas en el proceso de rectificación de estos espejos se emplean los así llamados *paraboloides de revolución*. Estas superficies se pueden obtener haciendo girar la parábola alrededor de su eje.

9. Una piedra, lanzada no verticalmente, describe una parábola (fig. 15); lo mismo se puede decir de un proyectil. Es verdad, que tanto en un caso como en el otro la resistencia del aire influye en la forma de la parábola y, de hecho, se obtiene otra curva. Pero, en el vacio, resultaría una parábola exacta.

Si mantenemos constante la velocidad v con la que el proyectil sale del tubo del cañón y variamos el ángulo de inclinación del tubo con respecto al horizonte, el proyectil describirá distintas parábolas y tendrá diferentes distancias de vuelo. La distancia máxima corresponde al ángulo de inclinación de 45° y es igual a $\frac{v^2}{g}$, donde g es la aceleración de la gravedad. Si disparamos verticalmente, el proyectil alcanzará una altura dos veces menor: $\frac{v^2}{2g}$. Cualquiera que sea la posición que demos al tubo (manteniéndolo en un mismo plano vertical), para cada velocidad

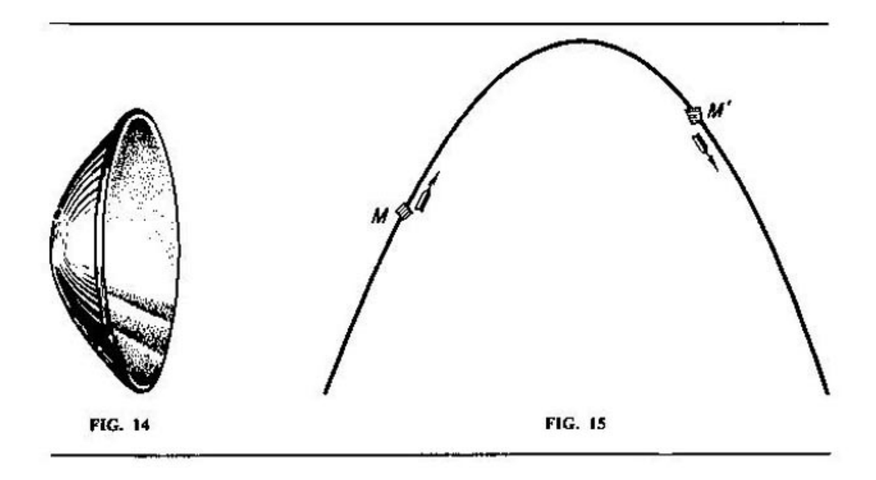


FIG. 14 FIG. 15

de salida del proyectil siempre quedarán lugares en la tierra y en el aire a donde no podrá llegar el proyectil. Resulta que estos lugares y los lugares a donde puede llegar el proyectil si se apunta adecuadamente, quedan separados también por una parábola que se denomina *parábola de seguridad* (fig. 16).

10. Por analogía con la elipse, podemos considerar las curvas que describe el punto M, si permanece constante la diferencia, y no la suma, de sus distancias a dos puntos determinados F_1 y F_2 o bien el producto o, finalmente, el cociente de estas distancias (en el último caso se obtiene la circunferencia).

Consideremos el caso de la diferencia. Para garantizar el movimiento necesario del lápiz, clavemos dos alfileres en los puntos

F_1 y F_2 y fijemos una regla en uno de ellos de modo que ésta pueda girar sobre el papel alrededor del alfiler (fig. 17). Tomemos un hilo (más corto que la regla) y fijemos uno de sus cabos al extremo S de la regla y el otro, al alfiler F_2. Estiremos ahora el hilo apretándolo contra la regla mediante la punta M del lápiz. Entonces la diferencia entre las distancias MF_1 y MF_2 será igual a:

$$(MF_1 + MS) - (MF_2 + MS) = F_1S - (MF_2 + MS),$$

o sea, será igual a la diferencia entre las longitudes de la regla y del hilo. Si giramos la regla alrededor de F_1 apretando contra ella el lápiz y manteniendo tirante el hilo, el lápiz describirá

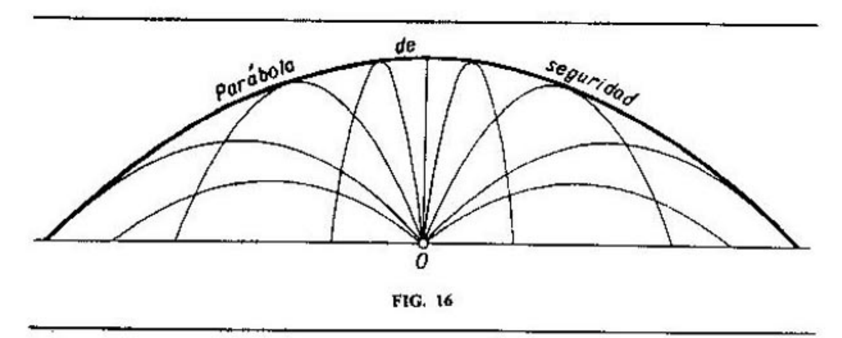


FIG. 16

sobre el papel una curva tal que la diferencia de distancias de cualquiera de sus puntos a F_1 y F_2 será siempre la misma e igual a la diferencia m entre las longitudes de la regla y del hilo. De esta forma obtendremos solamente la parte superior de la curva que aparece en la fig. 17 a la derecha. Para obtener la mitad inferior habrá que colocar la regla de modo que aparezca por debajo, y no por encima, de los alfileres. Por último, si fijamos la regla al alfiler F_2 y el extremo del hilo, al alfiler F_1, obtendremos la parte de la curva que aparece en esta misma figura a la izquierda. Ambas curvas construidas se consideran como una sola que se denomina *hipérbola*. Claro está que la hipérbola no se limita a los arcos construidos. Si tomamos una regla de longitud mayor y, a la vez, alargamos el hilo (pero conservando la diferencia entre sus longitudes), podremos prolongar indefinidamente nuestra hipérbola de la misma forma que, por ejemplo, el segmento de una recta.

11. Tracemos la recta que pasa por los focos de la hipérbola. Es un eje de simetría de la misma. El otro eje de simetría es

perpendicular al primero y pasa por el punto medio del segmento F_1F_2. El punto O de intersección de los ejes es el centro de simetría y se denomina simplemente *centro* de la hipérbola. El primer eje corta la hipérbola en dos puntos A_1 y A_2 llamados *vértices*; el eje A_1A_2 se denomina *eje real* de la hipérbola.

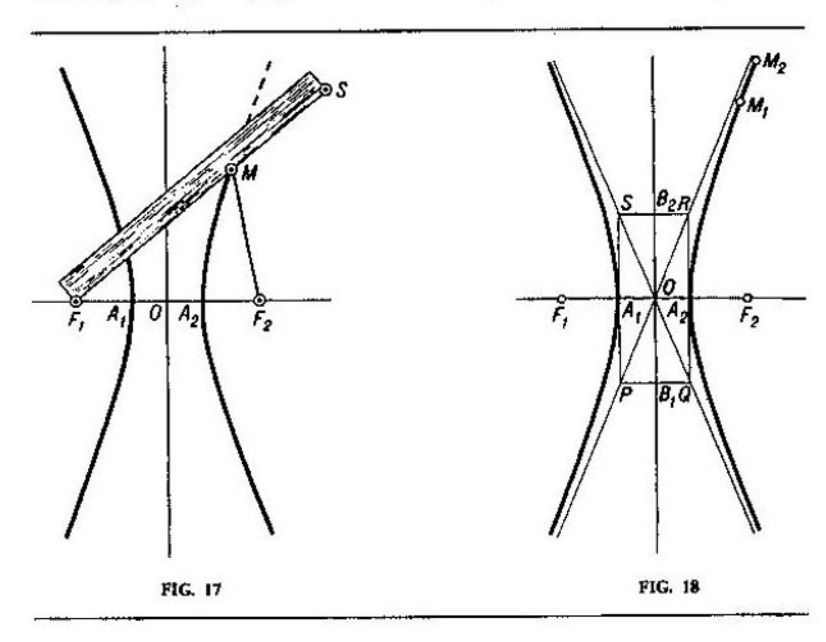


FIG. 17 FIG. 18

La diferencia entre las distancias del punto A_1 de la hipérbola a los focos F_1 y F_2 debe ser igual a m:

$$A_1F_2 - A_1F_1 = m.$$

Pero

$$A_1F_1 = A_2F_2$$

debido a la simetría de la hipérbola; por eso, podemos tomar A_2F_2 en lugar de A_1F_1 y así encontramos que

$$A_1F_2 - A_2F_2 = m.$$

Es obvio que la diferencia $A_1F_2 - A_2F_2$ es igual a A_1A_2, o sea, es igual a la longitud del eje real de la hipérbola. Es decir, la diferencia m entre las distancias de cualquier punto de la hipérbola a sus focos (con la particularidad de que la distancia

menor se resta de la mayor) es igual a la longitud del eje real de la hipérbola.

Partiendo del vértice A_1 (o A_2) como centro busquemos la intersección del segundo eje de simetría de la hipérbola con el arco de circunferencia cuyo radio es igual a la mitad de F_1F_2. Encontraremos dos puntos B_1 y B_2 (fig. 18); el segmento B_1B_2 se denomina *eje imaginario* de la hipérbola. Construimos ahora el rectángulo $PQRS$ cuyos lados son paralelos a los ejes de la hipérbola y pasan por los puntos A_1, A_2, B_1 y B_2 y tracemos sus diagonales PR y QS. Prolongándolas indefinidamente, obtendremos dos rectas que se denominan *asíntotas* de la hipérbola.

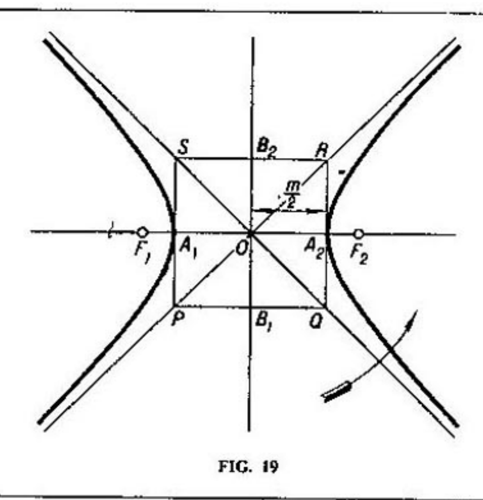


FIG. 19

Tienen la siguiente propiedad notable: jamás se cortan con la hipérbola aunque a medida que los puntos de la hipérbola se alejan de su centro, se aproximan más y más a las asíntotas situándose tan cerca de ellas como se quiera. Los arcos de hipérbola comprendidos entre dos puntos alejados del centro parecen en el dibujo segmentos de recta (véase el arco M_1M_2 de la fig. 18) aunque nunca son rectilíneos; simplemente tienen una encorvadura insignificante que escapa a la vista.

Para trazar aproximadamente la hipérbola sin recurrir a la regla y al hilo (que permiten la construcción exacta), se procede del modo siguiente. Se trazan primero los ejes de simetría de la hipérbola y se toman en el primero los focos F_1 y F_2 a igual

distancia del centro; después sobre este mismo eje se construyen a ambos lados del centro segmentos iguales a la mitad de m, o sea, a la mitad de la diferencia dada entre las distancias de los puntos de la hipérbola a sus focos, obteniendo los vértices A_1 y A_2 de la hipérbola; a continuación determinamos en el segundo eje los puntos B_1 y B_2, construimos el rectángulo $PQRS$ y, por último, trazamos y prolongamos sus diagonales. Así obtendremos el dibujo representado en la fig. 19. Resta trazar a mano dos arcos de modo que sean simétricos respecto a los ejes, que pasen por los puntos

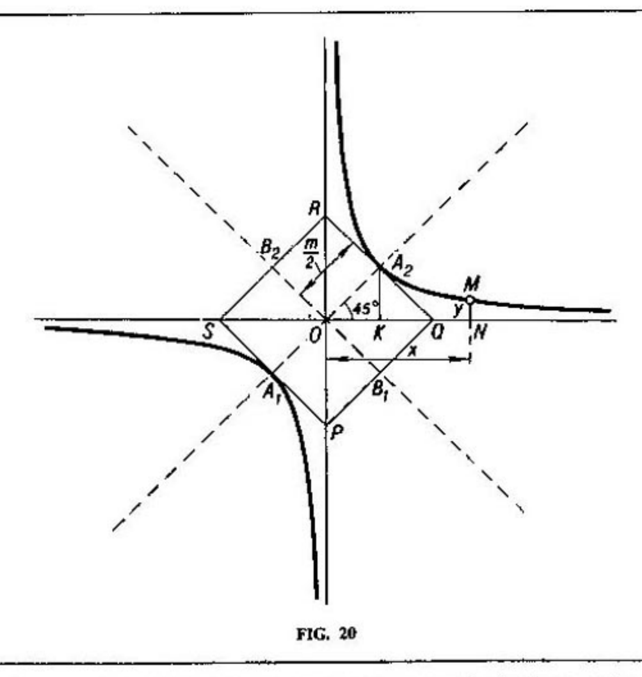


FIG. 20

A_1 y A_2 y que se encorven suavemente aproximándose más y más a las asíntotas PR y QS.

12. En particular, el rectángulo $PQRS$ puede ser un cuadrado. Esto ocurrirá si, y sólo si, las asíntotas de la hipérbola son perpendiculares. En este caso la hipérbola se denomina *equilátera*. En la fig. 19 viene representado precisamente este caso. Para mayor comodidad, giremos el dibujo en 45° alrededor del punto O en el sentido que indica la flecha; obtendremos la hipérbola representada en la fig. 20. Tomemos en la asíntota OQ un segmento

cualquiera $ON = x$ y levantemos en el punto N la perpendicular $NM = y$ hasta cortar la hipérbola. Entre y y x existe una relación muy sencilla: resulta que si aumentamos x un número de veces, y disminuirá el mismo número de veces; recíprocamente, si disminuimos x un número de veces, y aumentará el mismo número de veces. En otras palabras, la longitud $NM = y$ es inversamente proporcional a la longitud $ON = x$:

$$y = \frac{k}{x}.$$

Debido a esta propiedad, la hipérbola equilátera es el gráfico de la proporcionalidad inversa. Consideremos el vértice A_2 con el fin de determinar la relación que existe entre las dimensiones de la hipérbola y el coeficiente k de la proporcionalidad inversa. Para este vértice tenemos:

$$x = OK \text{ e } y = KA_2;$$

los segmentos OK y KA_2 constituyen catetos del triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa es

$$OA_2 = \frac{m}{2};$$

por eso,

$$x = y \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4},$$

de donde $2x^2 = \frac{m^2}{4}$, o sea, $x^2 = \frac{m^2}{8}$. Por otro lado, de la relación de proporcionalidad inversa $y = \frac{k}{x}$ resulta que $xy = k$ y por eso en nuestro caso (en el que $y = x$) se tiene: $x^2 = k$. Comparando ambos resultados, $x^2 = \frac{m^2}{8}$ y $x^2 = k$, encontramos: $k = \frac{m^2}{8}$. En otras palabras, el coeficiente k de la proporcionalidad inversa es igual a una octava parte del cuadrado de la longitud del eje real de la hipérbola.

13. Hemos señalado ya que si cortamos el cono con un cuchillo (o, hablando en términos geométricos, con un plano) sin tocar la base del cono, la sección tendrá la configuración de una elipse (véase la fig. 10). Resulta que si el plano que corta el cono pasa

por su base, se puede obtener como sección un arco de parábola (fig. 21, *a*) o un arco de hipérbola (fig. 21, *b*). Por lo tanto, las tres curvas – la elipse, la hipérbola y la parábola – son secciones cónicas.

El cono que estamos cortando tiene un defecto: sólo en el caso de la elipse obtenemos la curva completa (fig. 10); en el caso de la parábola y de la hipérbola, o sea, de curvas que se prolongan indefinidamente, obtenemos sólo una porción de las mismas. Es más, la fig. 21, *b* no permite ver cómo aparece la segunda rama

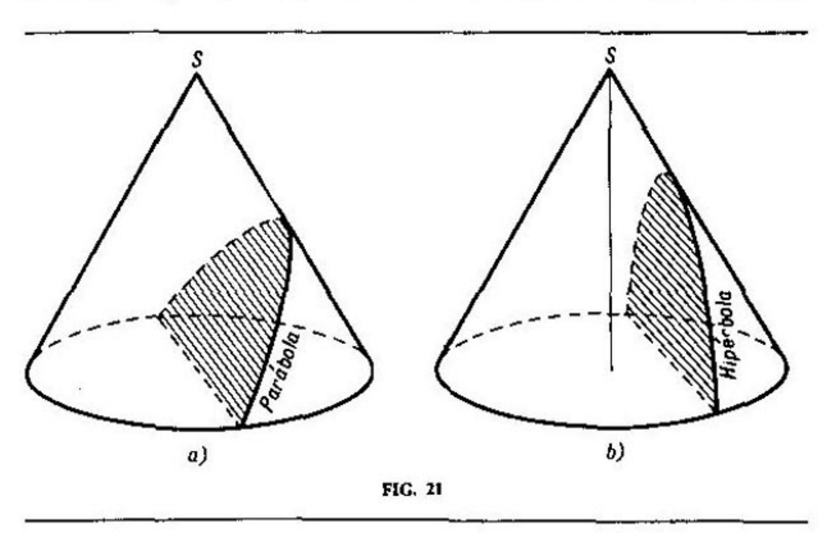


FIG. 21

de la hipérbola. Para eliminar este defecto tomaremos en lugar del cono una superficie cónica que se prolonga indefinidamente. Con este fin prolongaremos indefinidamente en ambas direcciones todas las generatrices del cono, es decir, todos los segmentos rectilíneos *AS*, *BS*, *CS*, *DS*, *ES*, etc. que unen los puntos de la circunferencia de la base del cono con su vértice (fig. 22; naturalmente, no podemos representar en nuestra figura las generatrices indefinidamente prolongadas y, por eso, también aquí trazamos segmentos de rectas pero de longitud mayor que los segmentos iniciales). Así obtendremos la superficie cónica necesaria que consta de dos mitades, o como suele decirse de dos hojas, de extensión indefinida que se tocan en el punto *S*. Toda la superficie cónica puede ser considerada como la superficie que describe una recta móvil, a saber, una recta que pasa por el punto *S* y que gira

de modo que permanece constante el ángulo que forma con la recta *OS*, eje de la superficie cónica. Esta recta móvil se denomina *generatriz* de la superficie cónica; es evidente que prolongando cada generatriz del cono tomado inicialmente, obtendremos una generatriz de la superficie cónica.

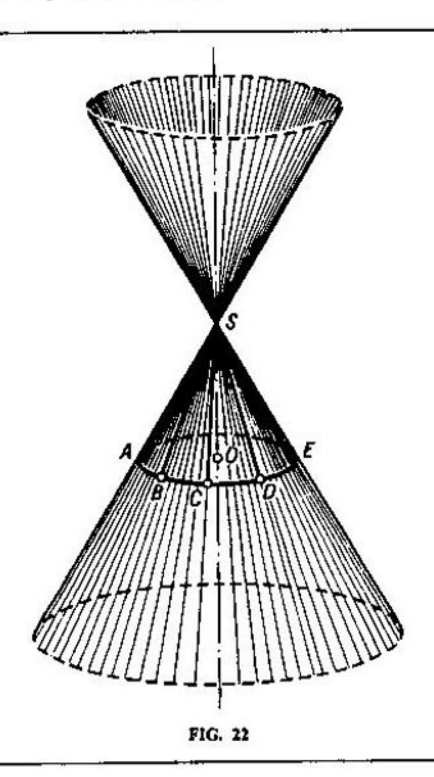


FIG. 22

Cortemos ahora con un plano toda la surerficie cónica. Si el plano corta todas las generatrices de una misma hoja de la superficie, obtendremos como sección una elipse o, como caso particular, una circunferencia (fig. 23, *a*); si el plano corta todas las generatrices menos una (a la que es paralelo), se obtiene como sección una parábola (fig. 23, *b*); por último, si el plano corta una parte de generatrices de una hoja y otra parte de generatrices de otra hoja, se obtiene como sección una hipérbola (fig. 23, *c*). Como vemos, para obtener la elipse o la parábola basta una hoja de la superficie cónica. En cambio, para obtener la hipérbola

necesitamos toda la superficie cónica: una rama de la hipérbola pertenece a una hoja y la otra rama, a otra hoja de la superficie.

14. Consideremos la curva que describe en el plano el punto M si permanece constante el producto p de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 del mismo plano. Esta curva se denomina *lemniscata* (que traducido del griego significa en forma de cinta). Si la longitud

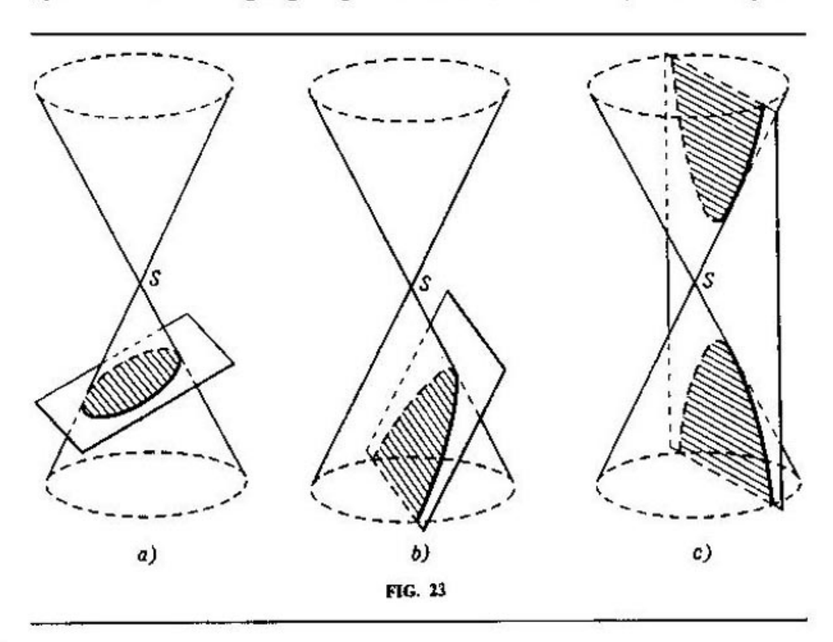


FIG. 23

del segmento F_1F_2 es c, las distancias del punto medio O del segmento F_1F_2 a F_1 y F_2 serán iguales a $\frac{c}{2}$ y el producto de estas distancias será igual a $\frac{c^2}{4}$. Consideremos primero el caso en que el producto constante p es igual precisamente a $\frac{c^2}{4}$, o sea,

$$MF_1 \cdot MF_2 = \frac{c^2}{4};$$

en este caso el punto O pertenecerá a la lemniscata y esta última tendrá la forma de un ocho «tumbado» (fig. 24). Si prolongamos

el segmento F_1F_2 en ambas direcciones hasta cortar la lemniscata, obtendremos dos puntos A_1 y A_2. Es fácil expresar la distancia $A_1A_2 = x$ entre los mismos a través de la distancia $F_1F_2 = c$ que conocemos. Notemos para ello que la distancia de A_2 a F_2 es igual a $\frac{x}{2} - \frac{c}{2}$ y que la distancia de A_2 a F_1 es igual a $\frac{x}{2} + \frac{c}{2}$; por eso, el producto de estas distancias será

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{c}{2}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{c}{2}\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{c^2}{4}.$$

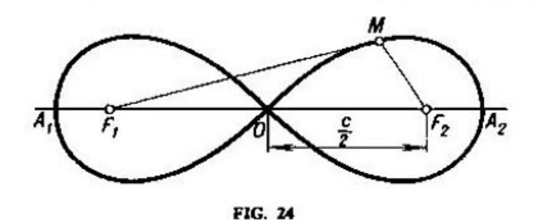


FIG. 24

Pero, según la hipótesis, este producto debe ser igual a $\frac{c^2}{4}$, o sea, $\frac{x^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{4}$, de donde $x^2 = 2c^2$ y $x = \sqrt{2}\,c \approx 1{,}414c$.

Existe una relación curiosa entre esta lemniscata y la hipérbola equilátera. Tracemos por el punto O diferentes rayos rectilíneos (fig. 25) y consideremos los puntos en los que éstas se cortan con la lemniscata. Resulta que mientras el ángulo entre el rayo y OF_2 (u OF_1) es menor de 45°, existirá otro punto de intersección, además de O en que el rayo corta la lemniscata; en cambio, si este ángulo es de 45° o mayor, no existirá el segundo punto de intersección. Tomemos un rayo cualquiera del primer grupo y supongamos que corta la lemniscata en el punto M (distinto de O); a partir del punto O construyamos en dicho rayo el segmento $ON = \frac{1}{OM}$. Si realizamos esta construcción para todos los rayos del primer grupo, los puntos N, correspondientes a los puntos M de la lemniscata, quedarán sobre la hipérbola equilátera cuyos

focos estarán en los puntos F'_1 y F'_2 tales que

$$OF'_1 = \frac{1}{OF_1} \quad \text{y} \quad OF'_2 = \frac{1}{OF_2}.$$

15. Si la magnitud del producto constante p es distinto de $\frac{c^2}{4}$, la lemniscata tendrá otra forma. En el caso en el oue p es

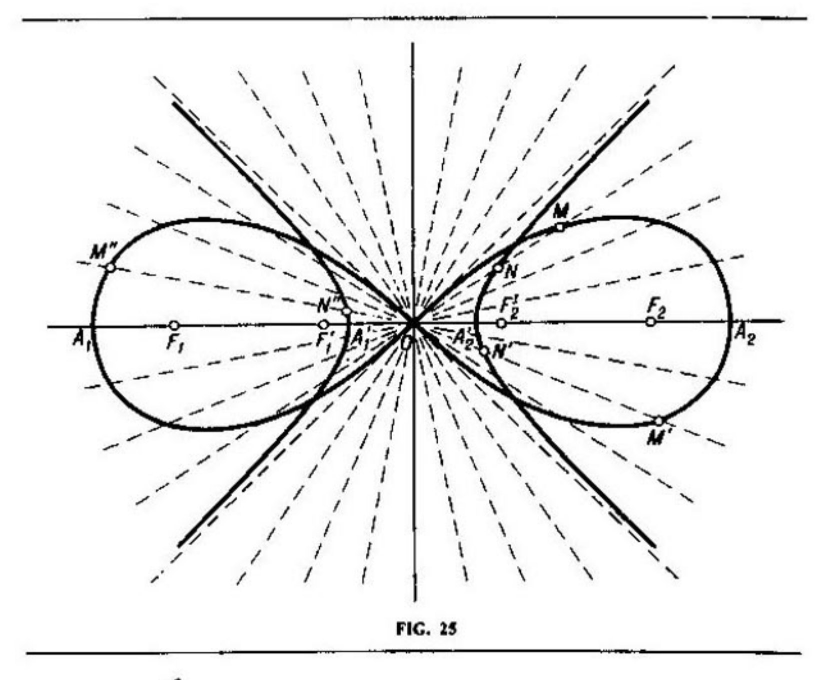


FIG. 25

menor de $\frac{c^2}{4}$, la lemniscata consta de dos óvalos, uno de los cuales contiene el punto F_1 y el otro, el punto F_2 (fig. 26). En el caso en el que el producto p es mayor que $\frac{c^2}{4}$, pero menor que $\frac{c^2}{2}$, la lemniscata tiene la forma de un bizcocho (fig. 27). Si p difiere poco de $\frac{c^2}{4}$, «la cintura» K_1K_2 del bizcocho será muy

estrecha y la curva se aproximará, por su forma, al ocho «tumbado». En cambio, si p difiere poco de $\frac{c^2}{2}$, el bizcocho apenas tiene cintura y para p igual a $\frac{c^2}{2}$ o mayor que $\frac{c^2}{2}$ la cintura desaparece totalmente y la lemniscata toma la forma de un óvalo (fig. 28; aquí se han representado distintas lemniscatas para poder compararlas).

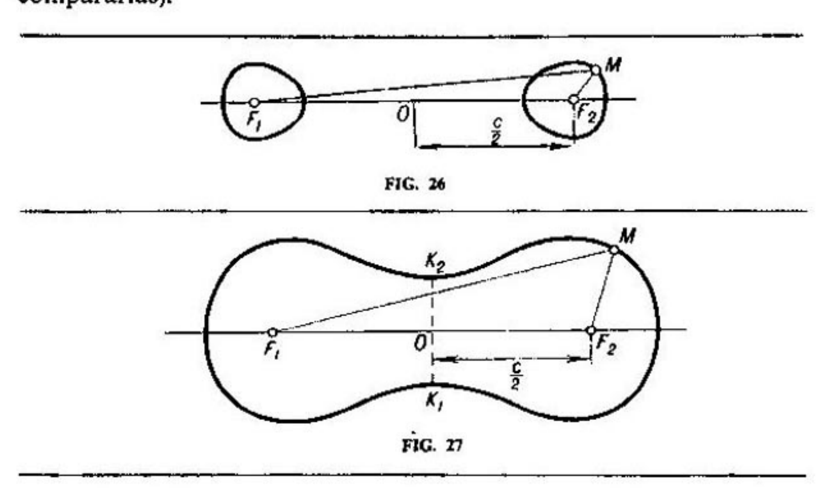


FIG. 26

FIG. 27

16. Tomemos ahora un número cualquiera de puntos

$$F_1, F_2, \ldots, F_n$$

en el plano y hagamos que el punto M se mueva de modo que permanezca constante el producto de sus distancias a estos puntos. Obtendremos una curva cuya forma depende de la posición mutua de los puntos

$$F_1, F_2, \ldots, F_n$$

y de la magnitud del producto constante. Esta curva se denomina *lemniscata de n focos.*

Hemos considerado lemniscatas de dos focos. Variando el número de los focos, colocándolos de modos distintos y escogiendo una u otra magnitud para el producto constante de las distancias, podemos obtener lemniscatas de las formas más raras. A partir de un punto A comencemos a desplazar la punta del lápiz sobre

el papel de modo que la punta vuelva de nuevo al punto inicial. Obtendremos así una curva; exigiremos sólo que no se corte a sí misma. Es evidente que podemos obtener así curvas que

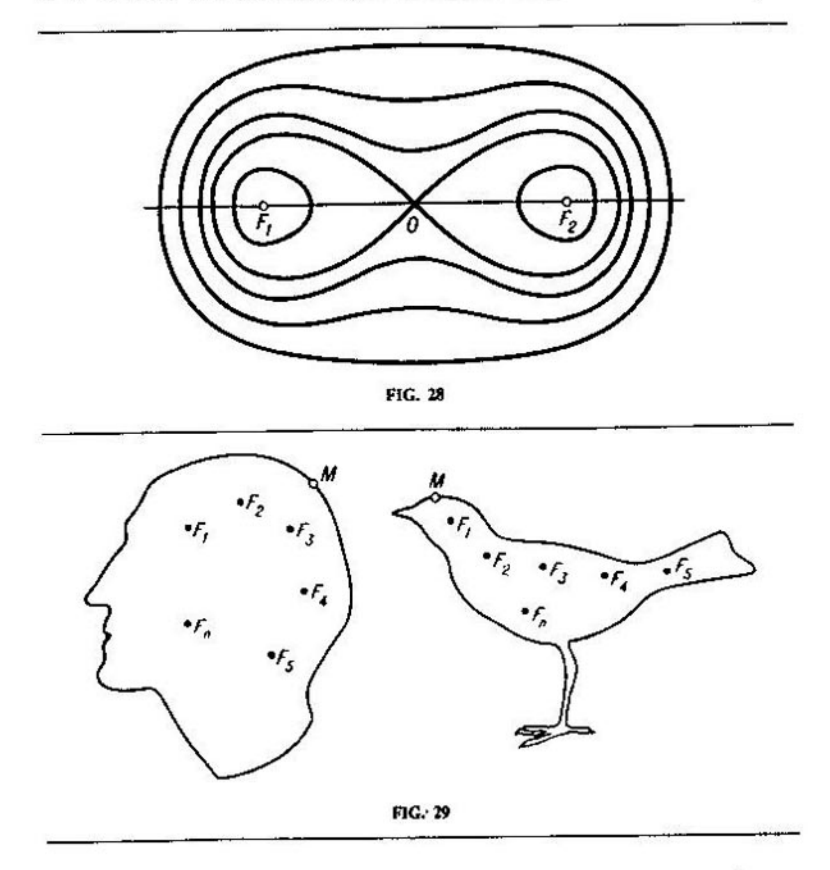


FIG. 28

FIG. 29

tienen, por ejemplo, la forma de una cabeza humana o de un pájaro (fig. 29). Resulta que siempre se puede escoger el número n, la posición de los focos

$$F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n$$

y la magnitud del producto constante de las distancias

$$MF_1 \cdot MF_2 \cdot \ldots \cdot MF_n = p$$

de modo que la lemniscata correspondiente no difiera a simple

vista de esta curva por arbitraria que sea la última. En otras palabras, las posibles desviaciones entre el punto M que describe la lemniscata y la curva escogida no pasarán de la anchura de la raya del lápiz (que de antemano puede ser afilado de modo que la raya sea muy fina). Este resultado maravilloso que pone de manifiesto la gran variedad y la riqueza de formas que tienen las lemniscatas de varios focos se demuestra con rigor absoluto, pero la demostración es compleja y exige el empleo de las Matemáticas Superiores.

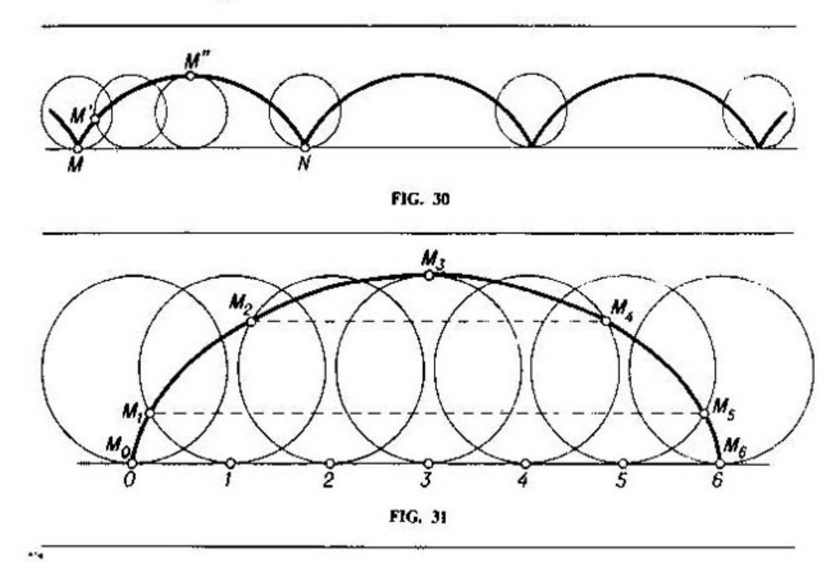


FIG. 30

FIG. 31

17. Apliquemos al borde inferior de la pizarra una regla y hagamos rodar sobre ella un aro o círculo (de madera o de cartón) apretándolo contra la regla y la pizarra. Si fijamos en el aro o círculo un pedazo de tiza (en el punto de contacto con la regla), este último describirá una curva (fig. 30) denominada *cicloide* (que traducido del griego significa circular). Un giro del aro corresponde a un arco $MM'M''N$ de la cicloide; si el aro continúa rodando, se obtendrán uno tras otro los demás arcos de la cicloide.

Para obtener en el papel la forma aproximada de un arco de la cicloide que corresponde al descrito durante el giro de un aro de, digamos, tres centímetros de diámetro, tomemos en la recta

un segmento de longitud

$$3 \cdot 3{,}14 = 9{,}42 \text{ cm}$$

igual a la longitud del aro, o sea, a la longitud de la circunferencia de tres centímetros de diámetro. Dividamos a continuación este segmento en un número de partes iguales, digamos en seis partes, y para cada punto de división consideremos la posición que tiene el aro cuando se apoya en dicho punto (fig. 31), numerando estas posiciones con las cifras

0, 1, 2, 3, 4, 5 y *6.*

Para pasar de una posición a la posición siguiente, el aro debe girar una sexta parte de la revolución completa (ya que la distancia entre dos puntos de división sucesivos es igual a una sexta parte de la circunferencia). Por eso, si en la posición *0* la tiza se encontraba en el punto M_0, en la posición *1* aparecerá en el punto M_1 correspondiente a una sexta de la circunferencia, contando desde el punto de tangencia; en la posición *2* estará en el punto M_2 a dos sextas del punto de tangencia, etc. Para obtener los puntos M_1, M_2, M_3, etc. bastará tomar el radio de 1,5 y transportarlo a partir del punto de tangencia según la circunferencia correspondiente; en la posición *1* hace falta una traslación, en la posición *2* se necesitan dos traslaciones efectuadas sucesivamente, en la posición 3, tres traslaciones, etc. Para trazar la cicloide resta ahora unir los puntos

$$M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 \text{ y } M_6$$

mediante una curva suave.

18. Entre muchas propiedades notables que tiene la cicloide señalemos una, debido a la cual esta curva recibió el nombre sonante y extraño de «braquistocrona» que consta de dos palabras griegas, mínimo y tiempo.

Consideremos el problema siguiente: ¿qué forma debe tener un canal metálico bien pulido que une dos puntos fijos *A* y *B* (fig. 32) para que sea mínimo el tiempo que invierte una bola metálica pulida en recorrerlo desde el punto *A* hasta el punto *B*? A primera vista, parece que el canal debe ser rectilíneo pues sólo en este caso la bola recorrerá el camino más corto entre *A* y *B*. Pero se trata del tiempo mínimo, y no del camino más corto, y este tiempo, aparte de la longitud del recorrido, depende también de la velocidad de la bola. Si encorvamos el canal hacia abajo, su parte correspondiente al punto *A* tendrá una pendiente mayor

en comparación con el canal rectilíneo y la bola obtendrá aquí una velocidad mayor que en el tramo de misma longitud del canal rectilíneo. Por otro lado, si la parte inicial tiene gran pendiente y es relativamente larga, la otra parte, correspondiente al punto *B*, también será larga pero tendrá una pendiente muy suave: la bola recorrerá rápidamente el primer tramo, muy lentamente el segundo y podrá demorar en llegar al punto *B*. Es decir, el canal debe tener, por lo visto, una forma cóncava, pero su encorvadura no debe ser excesiva.

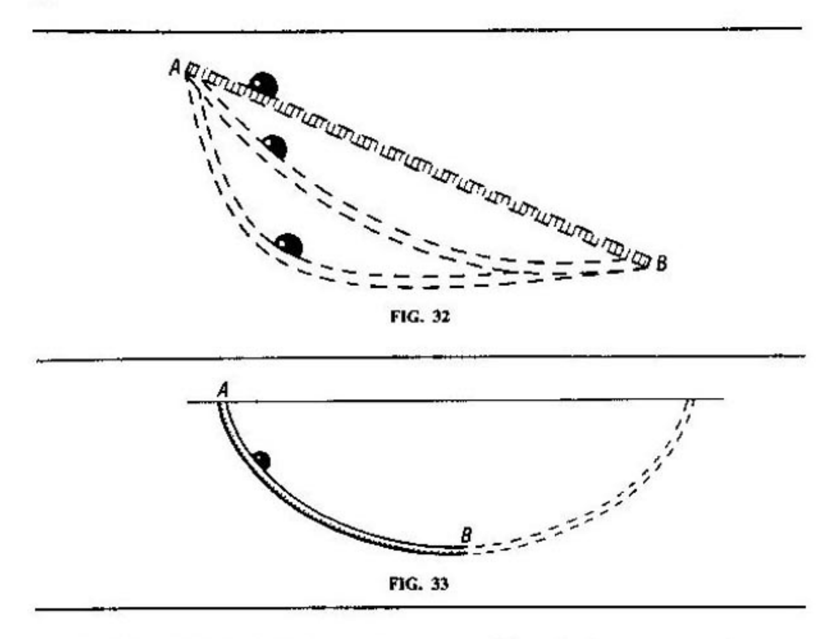


FIG. 32

FIG. 33

Galileo (1564–1642), astrónomo y físico italiano, pensaba que el canal de tiempo mínimo debe tener la forma de aro de una circunferencia. Pero los hermanos Bernoulli, matemáticos suizos, a principios del siglo XVIII demostraron mediante un cálculo exacto que esto no es cierto y que el canal debe tener la forma de un arco de cicloide (invertido hacia abajo, fig. 33). Desde ese momento la cicloide recibió el nombre de braquistocrona mientras que las demostraciones de Bernoulli dieron origen a una nueva rama de las Matemáticas, al Cálculo Variacional, que se ocupa de buscar las curvas que ofrecen el valor mínimo (o máximo, según el caso) a una u otra magnitud que nos interesa.

19. Concluimos nuestro relato sobre las curvas maravillosas. Hemos considerado sólo algunas de ellas sin agotar ni mucho menos sus propiedades. Existen muchas otras curvas que no hemos abarcado en nuestro libro: nada hemos dicho de la catenaria (curva formada por una cadena pesada suspendida entre dos puntos), ni de la espiral de Arquímedes (curva que describe un escarabajuelo al deslizarse a lo largo de una regla que gira uniformemente), ni tampoco del desarrollo (evolvente) de la circunferencia (curva que describe al desarrollarse el extremo de un hilo arrollado en una bobina), etc. Nuestro único fin era despertar en el lector, familiarizado con los rudimentos matemáticos nada más, el interés hacia algunos resultados curiosos del inmenso tesoro del saber matemático.

NÚMEROS COMPLEJOS Y REPRESENTACIONES CONFORMES

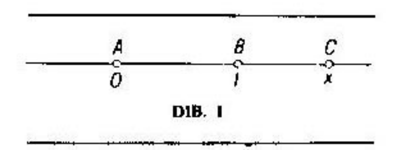
Traducido del ruso
por Silvia Sosin de Sepúlveda,
master en ciencias físicas

PREFACIO

Este libro hace conocer al lector los números complejos y funciones más sencillas de los primeros (incluyendo la función de N. E. Zhukovski, aplicándola al diseño del perfil de un ala de avión). La exposición se da en forma geométrica. Los números complejos se consideran como segmentos dirigidos y las funciones como representaciones. Para llevar a tal compresión de los números complejos hay que empezar de la interpretación geométrica de los números reales y de las operaciones con los mismos. El libro ha sido escrito a base de las clases que dictara el autor a los alumnos de la 9ª y 10ª clases de la escuela media y no exige, por parte del lector, conocimientos previos de los números complejos.

El autor

1. Para la representación geométrica de los números reales se emplea *el eje numérico*, es decir, la recta en la cual se han prefijado el punto A, *el origen* de coordenadas que representa



DIB. 1

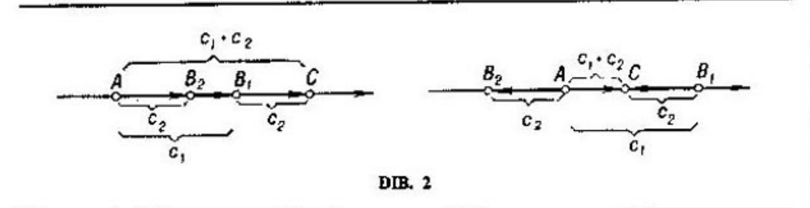
el número 0 y otro punto B que representa el punto $+1$ (dib. 1).

Como dirección positiva del eje numérico se toma la dirección de A a B y como unidad de longitud el segmento AB. Cualquier segmento AC representa el número real x cuya magnitud (o valor) absoluta es igual a la longitud del segmento. Si C y A no coinciden (es decir, si este número x no es igual a cero), x es positivo cuando la dirección de A a C coincide con la dirección positiva del eje y negativo cuando esta dirección es opuesta a la positiva del eje.

2. Todos segmentos del eje numérico serán considerados como segmentos dirigidos, o sea, como *vectores en la recta*. En cada vector diferenciaremos el origen y el extremo tomando como dirección del vector la dirección desde su origen hasta su extremo. Los vectores serán designados por dos letras, la primera indica el origen y la segunda el extremo. Cada vector, independientemente donde esté su origen (no es indispensable que sea en A), representará cierto número real, cuya magnitud absoluta es igual a la *longitud* del vector. Este número será positivo cuando la dirección del vector coincida con la dirección positiva del eje y negativo cuando ésta sea opuesta a la dirección positiva. Así, por ejémplo, el vector AB (origen A, extremo B) representa el número $+1$ y el vector BA (origen B, extremo A) el número -1.

3. La dirección del vector puede determinarse indicando el ángulo entre este vector y la dirección positiva del eje. Si la dirección del vector coincide con la dirección positiva del eje ese ángulo puede considerarse igual a 0°. Si, por el contrario, aquella es opuesta a la dirección positiva del eje ese ángulo puede considerarse igual a 180° (o $-180°$). Sea x un cierto número real; si $x \neq 0$, el ángulo entre el vector que representa este número y la dirección positiva del eje numérico es denominado *argumento* del número x. Es evidente que el argumento de un número positivo es igual a 0° y el argumento de un número negativo es igual a 180° (o $-180°$). El argumento del número x se designa por Arg x (donde Arg son las tres primeras letras de la pababra latina *argumentum* que puede traducirse aquí como signo, indicio). El número 0 no representa por un vector sino por un punto. Aunque en adelante nos refiramos al punto como a un caso particular del vector, o sea, como el vector de longitud cero, en ese caso no puede hablarse ni de la dirección ni del ángulo respecto del eje numérico; por eso al número 0 no le atribuiremos ningún argumento.

4. Dirijamos nuestra atención a la interpretación geométrica de las operaciones con números reales. Es necesario detenerse en la interpretación de la suma y la multiplicación partiendo de las que es fácil pasar a interpretar las operaciones inversas, o sea, la resta y la división. Sean c_1 y c_2 dos números reales, AB_1 y AB_2, los vectores que los representan. Buscaremos la regla por la cual, conociendo los vectores AB_1 y AB_2 se pueda trazar



DIB. 2

el vector que representa la suma $c_1 + c_2$ o el producto c_1c_2. Comenzamos con la suma. ¿Qué debe hacerse con el vector AB_1 que representa el primer sumando, para obtener el vector AC que representa la suma?

Se puede comprobar fácilmente que para ello es suficiente, en todos los casos, trazar el vector B_1C, de igual longitud

y dirección que el vector AB_2, a continuación del extremo del vector AB_1 y sobre una misma línea recta; AC será el vector buscado (dib. 2).

5. Pasemos a la multiplicación. Si uno de los factores es igual a cero, el producto es igual a cero; en este caso, el vector que representa el producto se reduce simplemente a un punto. Supongamos que ninguno de los factores es igual a cero. Entonces la magnitud absoluta*) del producto c_1c_2 será igual a $|c_1|\cdot|c_2|$, o sea, a la multiplicación de los valores absolutos de c_1 y c_2. La longitud del vector AD que representa ese producto será por ello igual al producto de la longitud de los vectores AB_1 y AB_2 que representan los factores. Cuando $c_2 > 0$ el signo del producto c_1c_2 coincidirá con el signo de c_1 y será contrario si $c_2 < 0$. En otras palabras, la dirección de AD coincidirá con la dirección de AB_1 cuando el Arg $c_2 = 0$ (lo que significa que $c_2 > 0$) y será contraria a la dirección de AB_1 cuando el *Arg* $c_2 = 180°$ (lo que significa que $c_2 < 0$). Ahora no resultará difícil contestar a la

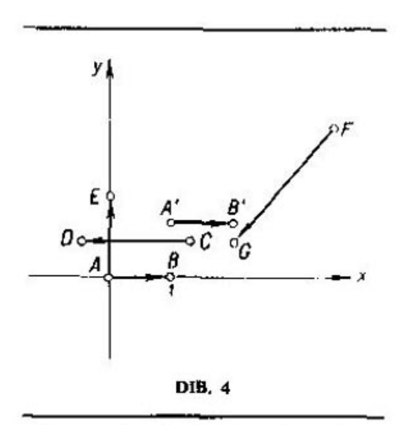
DIB. 3

pregunta ¿qué debe hacerse con el vector AB, que representa el multiplicando c_1, para obtener de éste el vector AD, que representa el producto c_1c_2 ($c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$)? Debe multiplicarse la longitud del vector AB_1 por $|c_2|$ (conservando la misma dirección) y luego girar el vector así variado en un ángulo igual al argumento de c_2 (es decir, en 0° si $c_2 > 0$ o en 180° si $c_2 < 0$), el vector obtenido será la representación del producto. Esta regla se aclara con un ejemplo, en el dib. 3 ($c_1 = 1{,}5$, $c_2 = -2$).

6. Cada vector en la recta hemos relacionado con un número que es representado por este vector. Ahora examinaremos todos los vectores posibles en el plano y cada uno de ellos también haremos relacionar con un número que está representado por ese vector. Los números que de este modo obtendremos o sea, *los números complejos*, tendrán otro carácter, más general que el de los números reales. Resultará que estos últimos sólo son un caso

*) La magnitud (o valor) absoluta de un número $|c|$ se designa por $|c|$. Por ejemplo, $|5| = 5$, $|-3| = 3$, $|0| = 0$.

particular de los números complejos, igualmente como los números enteros son un caso particular de los números racionales y los racionales de los reales.



DIB. 4

Comencemos así: en el plano, cuyos vectores examinaremos, tracemos dos rectas perpendiculares entre sí, o sea, los dos ejes numéricos Ax y Ay con origen común de coordenadas A y sea que el segmento AB representa la unidad de longitud (dib. 4). Entonces, cualquier vector que se encuentre en el eje Ax o que sea paralelo al mismo, puede tomarse, al igual que antes, como la representación geométrica de un número real. Así, los vectores AB y $A'B'$ cuyas longitudes son iguales a la unidad y cuyas direcciones coinciden con la dirección positiva Ax, representan el número 1, mientras que el vector CD de longitud 2 y de dirección opuesta a Ax representa el número -2. Los vectores que no pertenecen a Ax y que tampoco son paralelos a este eje, tales como AE y FG no representan ningún número real. Refiriéndonos a estos vectores diremos que ellos *representan los números imaginarios*. Con esto, los vectores de igual longitud, paralelos entre sí dirigidos al mismo sentido representan un mismo número, en tanto que los vectores que se diferencian o bien por su longitud o bien por su dirección representan números imaginarios diferentes. Nos hemos adelantado un tanto, ya que hablamos de la representación de los números imaginarios no sabiendo aún que son éstos; sin embargo, también en la vida cotidiana es frecuente que contemplemos el retrato antes de ver el original.

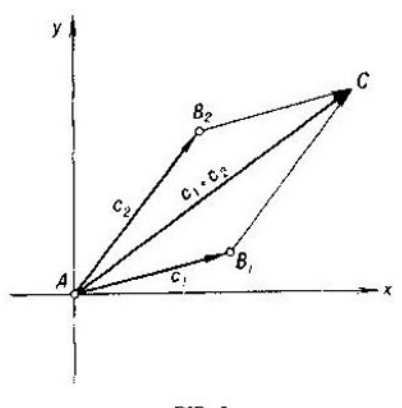
Antes demostramos que las operaciones con los números reales pueden ser sustituidas por operaciones con los vectores que

representan estos números. Análogamente, sustituiremos las operaciones con números imaginarios por operaciones con los vectores que los representan. No volveremos a formular nuevas reglas de las operaciones sino que mantendremos, en forma geométrica, las reglas halladas para la suma y la multiplicación de los números reales. La única diferencia consistirá en que estos últimos eran representados por vectores en la recta Ax (o vectores paralelos a esta recta), mientras que los números imaginarios se representan por vectores en el plano, que ni pertenecen ni son paralelos a Ax.

7. Antes de continuar, señalemos que los números reales (que ya conocemos) y los números imaginarios (los que sólo conocemos por sus «retratos») son denominados *números complejos* (la palabra «complejo» significa compuesto).

Recordemos, para hacer la comparación, que para el conjunto de los números racionales e irracionales también se emplea una denominación común, la de números reales (o naturales).

Empecemos a sumar los números complejos. Nosotros admitimos la validez de la regla enunciada para la suma de los números reales. Sean AB_1 y AB_2 dos vectores que representan ciertos números complejos c_1 y c_2; para trazar el vector que representa su suma $c_1 + c_2$, colocamos el vector B_1C, que es de igual longitud y dirección que el vector AB_2, a continuación del



DIB. 5

extremo del vector AB_1; el vector AC que une el origen de AB_1 con el extremo de B_1C será el buscado (dib. 5).

Lo nuevo consiste en que ahora aplicamos esta regla para

la suma de números complejos (representados por cualesquiera vectores en el plano), mientras que antes la utilizábamos sólo para los números reales (representados por vectores en la recta).

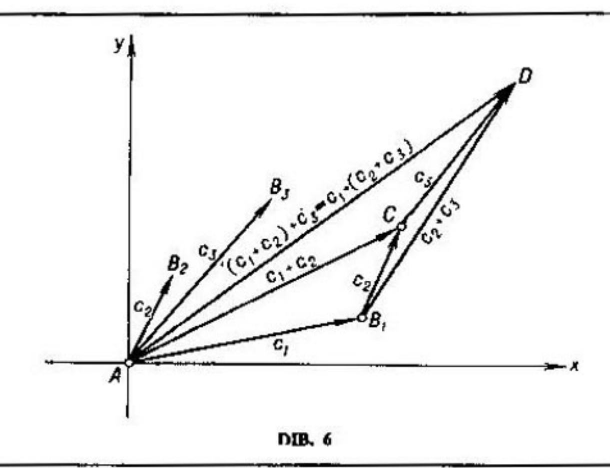
Si aplicamos esta misma regla para construir la suma $c_2 + c_1$ (cambió el orden de los sumandos), entonces a continuación del extremo del vector AB_2 que representa c_2 deberá trazar un vector de igual longitud y dirección que el vector AB_1 (que representa c_1). Es evidente que llegaremos al mismo punto C (en el dib. 5 se obtiene un paralelogramo) y, por consiguiente, la suma de $c_2 + c_1$ se representa por el mismo vector AC que la suma de $c_1 + c_2$. En otras palabras, de la regla de la suma se infiere la validez de la ley conmutativa:

$$c_2 + c_1 = c_1 + c_2.$$

Es fácil demostrar que también es válida la ley asociativa:

$$(c_1 + c_2) + c_3 = c_1 + (c_2 + c_3).$$

Las construcciones necesarias han sido trazadas en el dib. 6.



DIB. 6

Es evidente que al sumar $(c_1 + c_2)$ (AC) con c_3 (CD), obtendremos el mismo vector AD que cuando sumamos c_1 (AB_1) con $(c_2 + c_3)$ (B_1D).

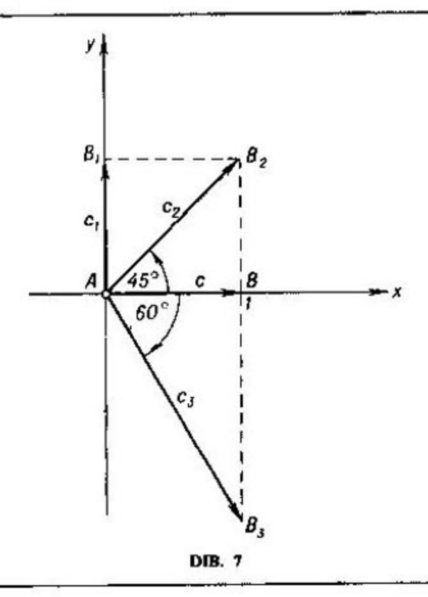
8. Antes de pasar a la multiplicación, traslademos a los números complejos los conceptos de la magnitud absoluta y del argumento.

Supongamos que el vector AB representa el número complejo c. Se denomina magnitud absoluta de c la longitud del vector AB argumento de c, el ángulo que la dirección positiva del eje Ax

forma con el vector AB. Este ángulo puede medirse en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj o en el mismo sentido que éstas, poseyendo entonces valor positivo o negativo, respectivamente. Es posible añadir a él, en forma arbitraria, cualquier múltiplo entero de 360°.

La magnitud absoluta y el argumento del número c se designan del mismo modo que en el caso de los números reales: $|c|$ y Arg c. En comparación con el caso de los números reales, lo nuevo aquí es que el argumento del número imaginario es diferente de 0° y de $\pm 180°$, en tanto que para los números reales (diferentes de cero) el argumento puede ser o bien 0° (si el número es positivo) o bien $\pm 180°$ (si éste es negativo).

En el dib. 7 pueden verse los vectores AB, AB_1, AB_2 y AB_3, que representan los números complejos, c, c_1, c_2 y c_3. El lector



DIB. 7

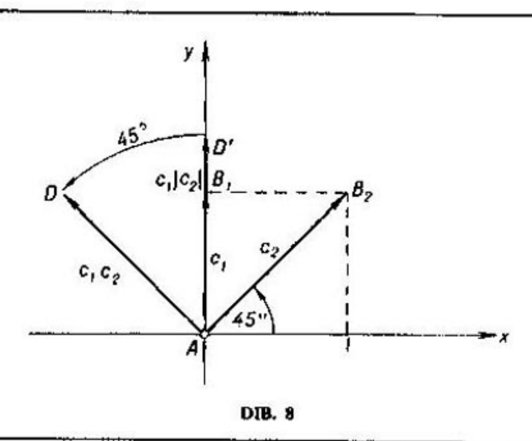
puede comprobar fácilmente la validez de las siguientes afirmaciones:

$$|c| = |c_1| = 1, \quad |c_2| = \sqrt{2}, \quad |c_3| = 2;$$

Arg $c = 0°$, Arg $c_1 = 90°$, Arg $c_2 = 45°$, Arg $c_3 = -60°$ (ó 300°).

9. Luego de haber introducido los conceptos de magnitud absoluta y argumento del número complejo, es posible manifestar

la regla de multiplicación de números complejos. Esta coincide con la regla correspondiente para la multiplicación de números reales: para multiplicar el número complejo c_1 por el número complejo c_2 ($c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$) debe multiplicarse por $|c_2|$ la longitud del vector que representa c_1 (conservando la misma dirección)



DIB. 8

y luego girar el vector así variado en torno del punto A en un ángulo igual al argumento de c_2; el vector obtenido representará el producto c_1c_2. Por ejemplo, el producto c_1c_2 se representa por el vector AD (dib. 8) y el producto c_2c_3 por el vector AE (dib. 9).

Además, respecto de la regla de la multiplicación debe agregarse que, cuando por lo menos uno de los factores es igual a cero, el producto también es igual a cero.

Si aplicamos la regla de la multiplicación al producto c_2c_1 (el orden de los factores es otro), deberá multiplicarse por $|c_1|$ la longitud del vector que representa c_2 y girar el vector variado alrededor del punto A en un ángulo igual al argumento de c_1. Evidentemente el resultado obtenido es el mismo que cuando se multiplica c_1c_2 ya que la longitud del vector obtenido es, en ambos casos $|c_1||c_2|$ y el ángulo entre Ax y este vector es igual a $\operatorname{Arg} c_1 + \operatorname{Arg} c_2$.

Así

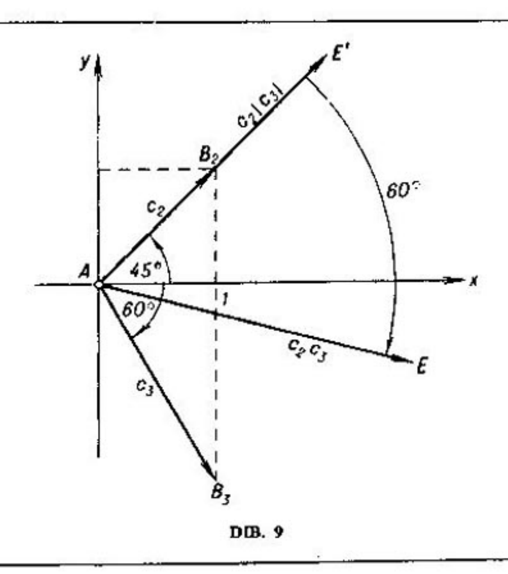
$$c_1c_2 = c_2c_1,$$

es decir que en la multiplicación de los números complejos es válida *la ley conmutativa.*

Del mismo modo, también es válida *la ley asociativa*

$$(c_1c_2)c_3 = c_1(c_2c_3).$$

En realidad, cada uno de estos productos está representado por un mismo vector cuya longitud es $|c_1|\cdot|c_2|\cdot|c_3|$ y que forma con el eje Ax un ángulo igual a $\operatorname{Arg} c_1 + \operatorname{Arg} c_2 + \operatorname{Arg} c_3$.



DIB. 9

Demostremos, finalmente, la validez de *la ley distributiva*:

$$(c_1 + c_2)c_3 = c_1c_3 + c_2c_3.$$

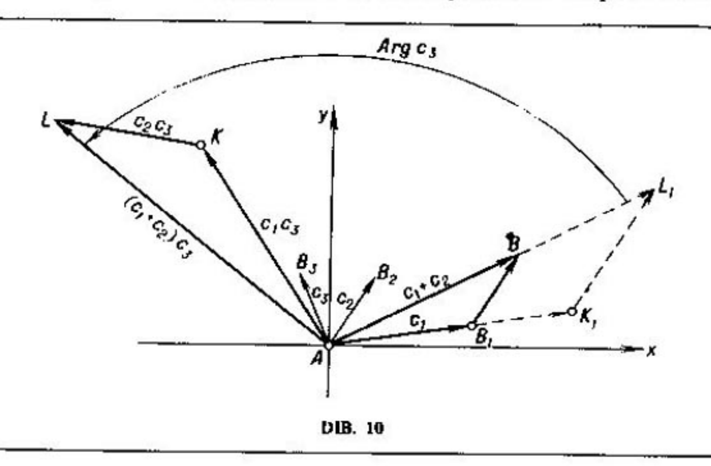
En el dib. 10 el vector AB representa la suma $c_1 + c_2$; si manteniendo la dirección de AB_1 y AB_2 multiplicamos todas las longitudes de los lados del triángulo AB_1B por $|c_3|$ se obtendrá el triángulo AK_1L_1, semejante a AB_1B. Ese triángulo estará formado por los vectores AK_1, K_1L_1, AL_1, obtenidos de los vectores c_1, c_2 y $(c_1 + c_2)$ mediante la variación en $|c_3|$ veces de todas las longitudes (sin variar las direcciones). Giremos ahora el triángulo AK_1L alrededor del punto A en el ángulo $\operatorname{Arg} c_3$; obtendremos el triángulo AKL. Según la regla de la multiplicación en el mismo el vector AK representa c_1c_3, KL representa c_2c_3 y AL, $(c_1 + c_2)c_3$.

De este mismo triángulo por la regla de la adición hallamos:

$$c_1c_3 + c_2c_3 = (c_1 + c_2)\,c_3,$$

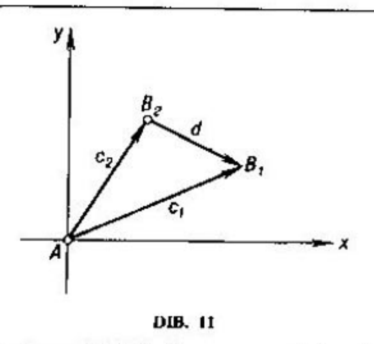
que es lo que debía demostrarse.

10. Las operaciones de resta y división se definen como inversas respecto de la suma y la multiplicación respectivamente.



DIB. 10

Denominaremos *diferencia de los números* c_1 y c_2 el número complejo d y escribiremos $d = c_1 - c_2$ si $c_1 = c_2 + d$, es decir, si c_1 es la suma de c_2 y d. Representando en el dib. 11 esta relación

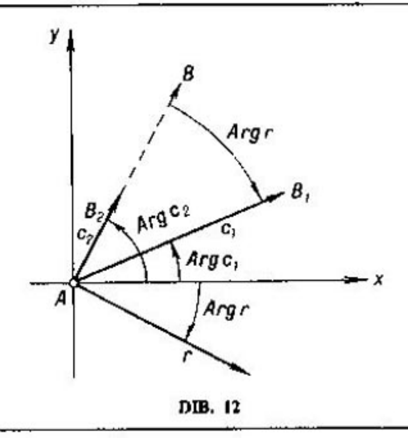


DIB. 11

entre c_2, d y c_1 vemos que el vector que representa la diferencia $c_1 - c_2$ se obtiene si se une el punto B_2 (el extremo del vector que representa el sustraendo) con el punto B_1 (el extremo del

vector que representa el minuendo) y se toma el primero de ellos como origen del vector y el segundo como extremo del mismo.

Análogamente el número complejo r lo denominaremos *cociente de los números* c_1 y c_2 ($c_2 \neq 0$) y escribiremos $r = c_1 : c_2$ o $r = \frac{c_1}{c_2}$, si $c_1 = c_2 r$, es decir, si c_1 es el producto de c_2 por r (dib. 12).



DIB. 12

De aquí se deduce que $|r|$ que es la longitud del vector que representa r, es igual a $\frac{|c_1|}{|c_2|}$ y el Arg r es igual al ángulo B_2AB_1 medido en dirección de AB_2 a AB_1 (en el dib. 12 es la dirección de giro en sentido de las agujas del reloj, por consiguiente, el ángulo debe considerarse como negativo).

Señalemos algunos casos particulares. Si c_1 y c_2 se representan por vectores paralelos igualmente orientados, el ángulo B_2AB_1 es igual a 0° y, en consecuencia, Arg $r = 0°$, o sea, r es un número real positivo. Si c_1 y c_2 se representan por vectores paralelos pero contrariamente orientados, el ángulo B_2AB_1 es igual a 180° y r es un número real negativo.

En resumen puede decirse que la suma y la multiplicación de números complejos satisfacen las mismas leyes, conmutativa, asociativa y distributiva que en el caso de los números reales y que la sustracción y la división, al igual que para los números reales, se definen como las operaciones inversas, respectivamente, a la suma y la multiplicación. Por ello, basándonos en las

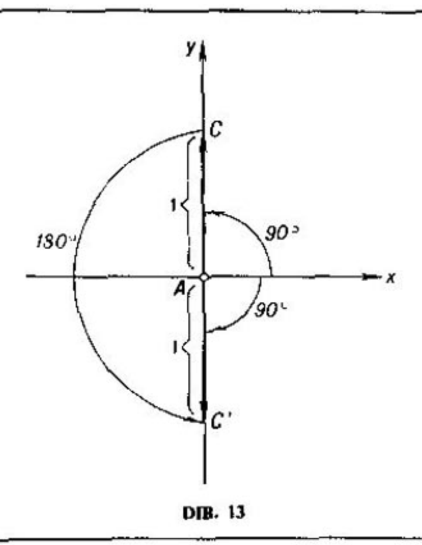
definiciones dadas para las operaciones y en las leyes citadas, podemos decir que todas *las reglas de las operaciones* y fórmulas deducidas en el álgebra para los números reales también deben ser válidas para los números complejos. Por ejemplo:

$$(c_1 + c_2)(c_1 - c_2) = c_1^2 - c_2^2, \quad (c_1 + c_2)^2 = c_1^2 + 2c_1c_2 + c_2^2,$$

$$\frac{c_1}{c_2} + \frac{c_3}{c_4} = \frac{c_1c_4 + c_2c_3}{c_2c_4} \quad (c_2 \neq 0 \text{ y } c_4 \neq 0), \text{ etc.}$$

11. Al estudiar matemáticas el lector habrá encontrado con frecuencia la ampliación (o generalización) del concepto de número. Esto ocurrió en la aritmética, cuando se introdujeron los quebrados; en el álgebra, al introducir los números negativos y, más tarde los números irracionales. Cada nueva ampliación del concepto «número» abría nuevas posibilidades para la resolución de problemas que antes de ello parecían irresolubles e incluso sin sentido. Así, la introducción de las fracciones permitió efectuar la división de dos números en todos los casos en que el divisor es diferente de cero como, por ejemplo, dividir 4 por 3 ó 2 por 5; la introducción de los números negativos permitió efectuar la resta en todos los casos, por ejemplo, restar 5 de 2; la introducción de los números irracionales permitió expresar mediante un número la longitud de todo segmento inconmensurable con la unidad, por ejemplo, la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado es igual a uno. Sin embargo, si tan solo nos hubiéramos limitado a los números reales no hubiéramos podido extraer la raíz cuadrada de un número negativo. Comprobemos ahora que la introducción de los números complejos hace que este problema deje de ser irresoluble. Es natural que denominemos como raíz cuadrada del número complejo c (la que designaremos con $\sqrt{c}$) el número complejo a, cuyo cuadrado (es decir, el producto de a por sí mismo) es igual a c. En otras palabras, $a = \sqrt{c}$ indica que $aa = c$. Sea c un número negativo, por ejemplo, $c = -1$; si deseamos hallar $\sqrt{-1}$ hay que resolver la ecuación $a^2 = -1$. Multiplicar a por a significa, en primer lugar, multiplicar la longitud del vector que representa a por $|a|$, o sea, por esa misma longitud, sin cambiar la dirección de a y luego girar el vector obtenido en torno al punto A en un ángulo igual al Arg a. Es evidente que la longitud del vector hallado será entonces igual a $|a|^2$. Pero ese vector debe representar el número -1; por lo tanto, su longitud es igual a uno. Así, $|a|^2 = 1$ y, por consiguiente, $|a| = 1$ (la longitud de un vector siempre no es negativa). Prosiguiendo, el ángulo entre el vector que

representa a^2 y el eje Ax es igual a Arg a + Arg a = 2 Arg a; por otra parte $a^2 = -1$; así que este ángulo debe ser igual a $+180°$ o $-180°$. Por esto, 2 Arg $a = \pm 180°$, de donde se infiere que Arg $a = 90°$ o Arg $a = -90°$. Hemos obtenido, por consecuencia, dos vectores diferentes AC y AC', que representan los dos valores diferentes de $\sqrt{-1}$ (dib. 13). El número imaginario representado por el vector



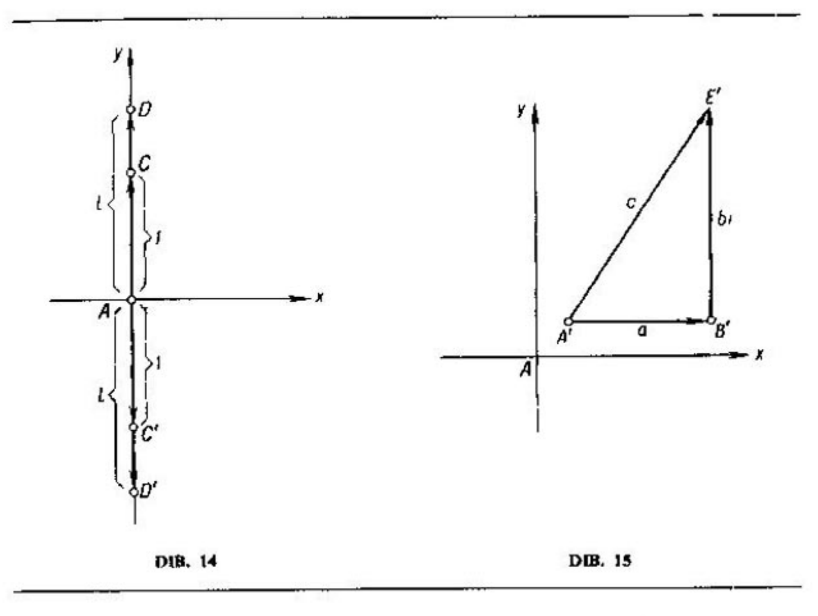
DIB. 13

AC es designado con la letra i y se le denomina *unidad imaginaria*; tenemos entonces que: $|i| = 1$, Arg $i = 90°$. Se comprende fácilmente que el número imaginario representado por el vector AC' puede obtenerse de i, multiplicando i por -1. En realidad, según la regla de la multiplicación, para esto es necesario multiplicar la longitud de AC por $|-1| = 1$ (sin embargo el vector AC no varía) y luego girarlo en torno al punto A en el ángulo Arg $(-1) = 180°$; se obtiene el vector AC'. El número imaginario correspondiente a este vector es, de esta manera, $i(-1)$ ó $-1 \cdot i$, brevemente, $-i$. Así, $\sqrt{-1} = \pm i$.

12. Examinemos un cierto vector AD situado en el eje Ay (o paralelo al mismo) (dib. 14) y sea l su longitud. Si la dirección de este vector coincide con la dirección positiva del eje Ay (hacia arriba respecto de Ax), el número imaginario c representado por éste, puede obtenerse de i mediante su multiplicación por el número positivo l; por consiguiente, $c = li$.

Si la dirección de AD es opuesta a la dirección positiva de Ay, el número c se obtiene de i mediante su multiplicación por el número negativo $-l$ (ó a partir de $-i$ mediante su multiplicación por l); en este caso, por consiguiente, $c = -li$.

Así, todo vector (de longitud diferente de cero) situado en el eje Ay (o paralelo al mismo) representa el número imaginario de tipo $\pm li$, donde se toman los signos «más» o «menos» respectivamente si la dirección del vector coincide con la dirección positiva de Ay o no. Debido a esto el eje Ay se denomina *eje imaginario*. El eje Ax, cuyos vectores representan los números reales se denomina *eje real*.



DIB. 14 DIB. 15

Examinemos un cierto vector $A'E'$ que no está situado en ninguno de los dos ejes ni es paralelo a ellos. Por medio de la construcción que indicaremos en el dib. 15, el número c, que este vector representa, puede darse como la suma de otros dos números; uno que es representado por el vector $A'B'$ paralelo a Ax (o situado en Ax) y otro que es representado por el vector $B'E'$, paralelo a Ay. Pero $A'B'$ representa un cierto número real a, en tanto que $B'E'$ representa un número imaginario del tipo bi, por lo que $c = a + bi$.

Así, nosotros hemos representado el número imaginario c por medio de los números reales a y b y la unidad imaginaria i. Como el vector $A'E'$ no es paralelo a ninguno de los ejes, entonces $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Es fácil comprender que los números representados por vectores paralelos a uno u otro eje pueden escribirse en forma análoga; si el vector es paralelo al eje real entonces representa un número del tipo $a + 0 \cdot i$ y si, al eje imaginario, representará un número del tipo $0 + bi$.

En resumen, cada número complejo c puede representarse en la forma $c = a + bi$, donde a y b son números reales e i la unidad imaginaria.

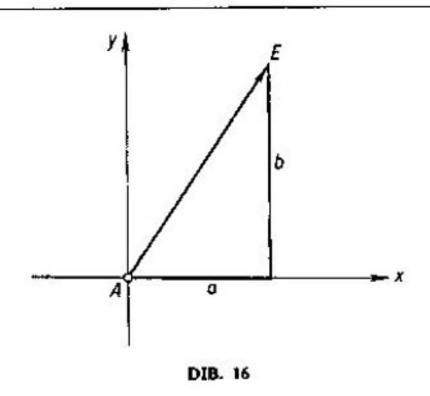
13. Resumamos. Hemos empezado con la representación de los números reales por medio de vectores situados en una misma recta, hemos dado interpretación geométrica a las reglas de las operaciones con ellos, reduciendo luego estas operaciones a los vectores y luego hemos comenzado a examinar todos los vectores posibles en el plano como la representación de números de tipo más general, los números complejos que sólo en un caso particular (cuando los vectores están situados en el eje Ax o son paralelos a él) son números reales. Extendiendo las operaciones con los vectores en la recta a los vectores en el plano, hemos introducido las operaciones de suma y multiplicación (y más tarde también las operaciones inversas, o sea, la resta y la división) y nos hemos convenido de que ellas se rigen por las mismas leyes que las operaciones con los números reales. Con esto, acerca de los mismos números complejos sólo sabemos que todos ellos se representan por medio de vectores y de modo tal que dos vectores cualesquiera de igual longitud, paralelos entre sí y orientados hacia el mismo lado representan un mismo número complejo, mientras que los vectores que se diferencian en longitud o dirección representan números diferentes. Nos hemos convenido de que los números complejos permiten extraer la raíz cuadrada de -1 y hemos introducido la unidad imaginaria i como uno de los dos valores de $\sqrt{-1}$ (aquel valor de la raíz cuyo argumento es $+90°$). Finalmente, basándonos en la regla de operaciones con los números complejos, hemos demostrado que cada número complejo c puede ser representado en la forma $c = a + bi$, donde a y b son números reales.

Así, *c se compone* de dos sumandos a y bi; uno de ellos, a se representa por un vector en el eje real y puede considerarse como el producto del número real a por la unidad real; el otro, bi se representa por un vector del eje imaginario y puede

considerarse como el producto del número real b por la unidad imaginaria i. Tal construcción de todo número complejo permite comprender porqué todos estos números tienen el nombre de complejos (es decir, compuestos).

Señalemos que a es denominada parte real y b, parte imaginaria del número c. Por ejemplo, para el número $c = 3 - 2i$ la parte real es igual a 3 y la parte imaginaria, igual a -2.

14. Si representamos los números complejos mediante vectores con origen en un mismo punto A, entonces a números complejos diferentes corresponderán vectores, no coincidentes entre sí y al contrario: a vectores no coincidentes responderán números complejos diferentes. Dado $c = a + bi$; entonces, el extremo del vector AE, que representa el número c, tendrá abscisa a y ordenada b (dib. 16).

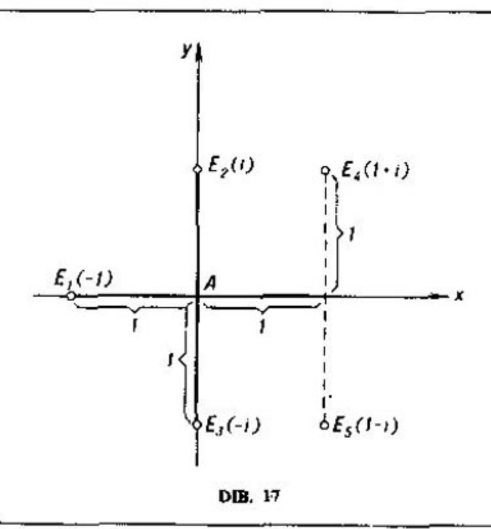


DIB. 16

De este modo, si colocamos el origen del vector que representa el número $c = a + bi$ en el origen de coordenadas A, los números a y b serán las coordenadas del extremo de este vector. Geométricamente los números complejos pueden representarse, de acuerdo con lo señalado, no sólo mediante vectores sino también por medio de puntos. Precisamente, cada número complejo $a + bi$ es posible representar mediante un punto único E con coordenadas a y b y viceversa: cada punto E' con coordenadas a' y b' puede considerarse como la representación del número complejo $a' + b'i$. En el dib. 17 se muestran los puntos E_1, E_2, E_3, E_4 y E_5 que representan, respectivamente, los siguientes números: -1, i, $-i$, $1 + i$, $1 - i$.

En lo sucesivo y para abreviar, denominemos frecuentemente

del mismo modo, «punto z», el número complejo z y el punto E que lo representa. Por ejemplo, la expresión «punto $1 + i$» señala el mismo número $1 + i$ y el punto E_4 que lo representa (dib. 17).



DIB. 17

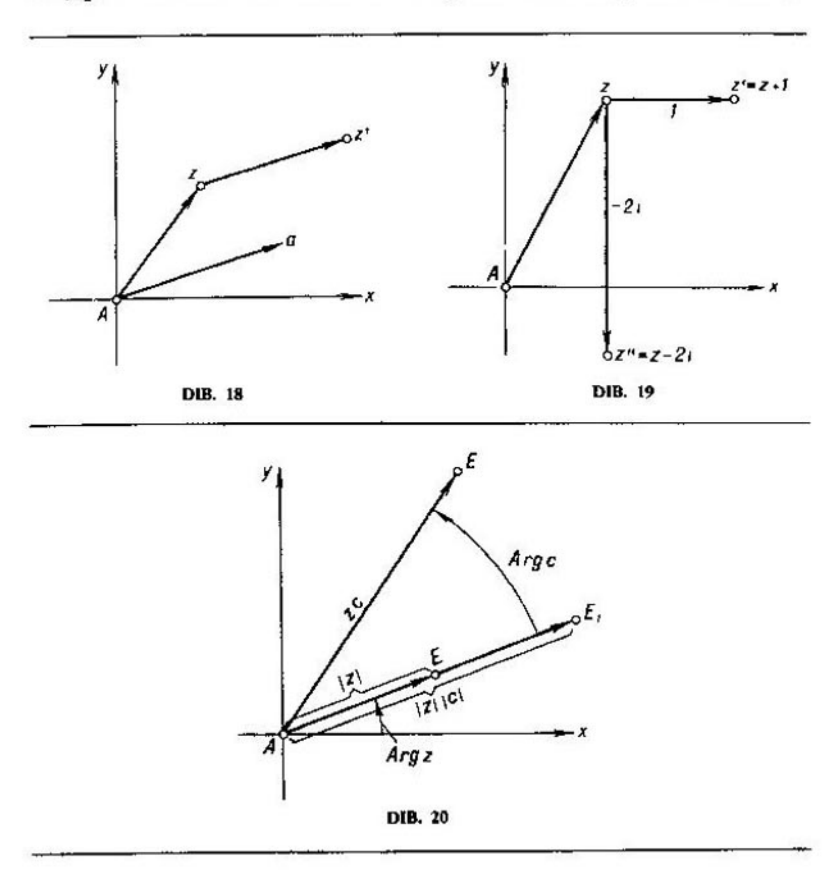
Del texto podrá inferirse acerca de qué de los dos sentidos de esta expresión se trata. Además, es preferible acostumbrarse a no pensar en esto y emplear ambos sentidos como un solo.

15. Sea z cierto punto. Si sumamos z a un cierto número a se obtiene un nuevo punto $z' = z + a$. Es evidente que se puede pasar del punto z al punto z' mediante *desplazamiento* (o *traslado*) *en el vector* a, es decir, mediante el desplazamiento del punto z por la dirección del vector a, a una distancia igual a la longitud de este vector (dib. 18). Eligiendo el a correspondiente, puede obtenerse cualquier desplazamiento del punto z. Por ejemplo, si es necesario desplazar el punto z en la dirección positiva del eje Ax en la unidad, tomamos $a = 1$; aquí $z' = z + 1$ será el punto buscado. Si hay que desplazar z en dos unidades en la dirección negativa del eje Ay, tomamos $a = -2i$; el punto $z'' = z + (-2i) = z - 2i$ será el que buscamos (dib. 19).

Así, la operación de suma $z' = z + a$ significa geométricamente el desplazamiento del punto z en el vector a.

16. Examinemos la operación de multiplicación de z por cierto número $c \neq 0$. Para multiplicar z por c debe multiplicarse la

longitud del vector AE (es decir, el número $|z|$) por el número $|c|$ y girar el vector obtenido AE_1 en un ángulo igual al Arg c (dib. 20). La primera operación no varía la dirección del vectoi AE, puede variar solamente su longitud. Esta longitud disminuye



DIB. 18

DIB. 19

DIB. 20

si $|c| < 1$ y aumenta si $|c| > 1$, queda, finalmente, invariable si $c = 1$. Llamemos esta operación *alargamiento* (*prolongación*) del vector AE en $|c|$ veces. La palabra «alargamiento» debe entenderse aquí en sentido figurado; de hecho, alargamiento tendrá lugar sólo cuando $|c| > 1$ y la longitud del vector AE aumentará en $|c|$ veces en el caso de la multiplicación. Sin embargo también

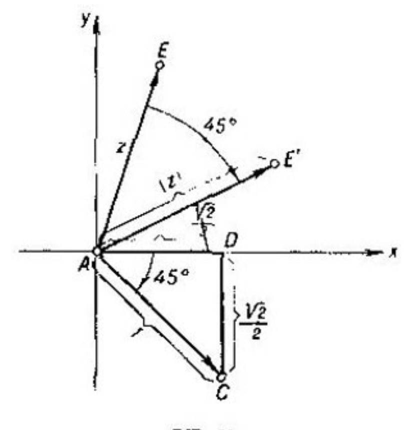
conviene emplear este término cuando $|c| = 1$ (la longitud del vector AE no varía) y cuando $|c| < 1$ (la longitud del vector AE disminuye al efectuar la multiplicación).

Si c es un número real positivo, el $\operatorname{Arg} c = 0$.

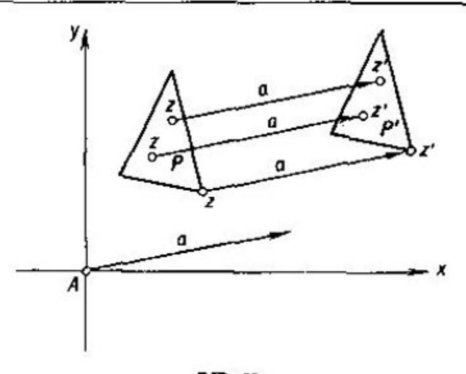
En este caso el giro en el ángulo $\operatorname{Arg} c$ no varía el vector AE_1 hallado por el alargamiento; por lo tanto, el punto E_1 representa el producto zc. Puede decirse que la multiplicación de z por el número real positivo c significa, geométricamente, el alargamiento en c veces del vector AE (que representa z). Cambiando c, es posible obtener distintos alargamientos del vector AE. Así, para lograr su alargamiento en dos veces hay que multiplicar z por 2; para obtener un alargamiento de $\frac{2}{3}$ debe multiplicarse z por $\frac{2}{3}$.

Si el factor c no es un número real positivo el $\operatorname{Arg} c$ será diferente de cero. En este caso la multiplicación de z por c no se reduce al alargamiento del vector AE sino que también exige el giro del vector alargado en el ángulo $\operatorname{Arg} c$, en torno al punto A. Por consiguiente, en el caso general, la operación de multiplicación $z \cdot c$ significa tanto el *alargamiento* (en $|c|$ veces) como el *giro* (en el ángulo $\operatorname{Arg} c$). En el caso particular, cuando la magnitud absoluta de c es igual a la unidad, la multiplicación por c se reduce solamente al giro del vector AE en el ángulo $\operatorname{Arg} c$ alrededor del punto A. Realizando la elección conveniente de c puede lograrse el giro de AE cualquier ángulo. Así, por ejemplo, si debe girarse AE en 90° en dirección positiva (de derecha a izquierda), es suficiente multiplicar z por i, ya que $|i| = 1$ y $\operatorname{Arg} i = 90°$. Para girar AE 45° en dirección negativa (en sentido de las agujas del reloj) resulta suficiente multiplicar z por el número complejo c, cuyo módulo es igual a la unidad y su argumento, igual a $-45°$. Este número puede hallarse fácilmente con ayuda del dib. 21, en el cual se ha señalado el punto C que representa el número c. Evidentemente las coordenadas del punto C son: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, por lo tanto $c = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$. Así, la multiplicación de z por $c = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ es igual al giro del vector AE (que representa z) en torno al punto A en ángulo de 45°, en dirección negativa.

17. Como hemos visto las fórmulas $z' = z + a$ o $z' = zc$ transforman el punto z en el punto z'. Examinemos ahora no uno sino un *conjunto infinito de puntos* z que componen una cierta *figura geométrica P* (por ejemplo, un triángulo, dib. 22). Si aplicamos



DIB. 21



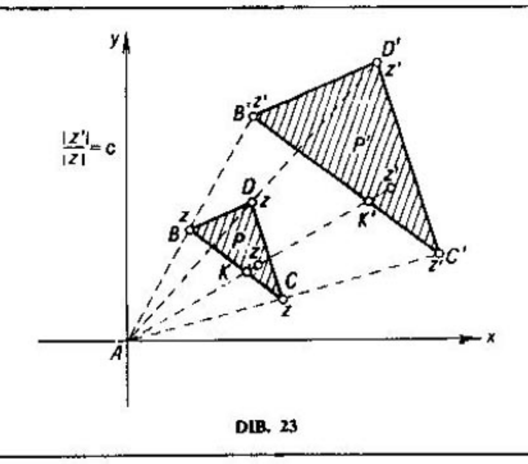
DIB. 22

la fórmula $z' = z + a$ a cada punto z, de cada uno de los puntos se obtendrá un nuevo punto z', *desplazado en el vector a*. Todos estos puntos desplazados constituirán la figura P'. Es evidente que ésta puede obtenerse si desplazamos la figura P, como un todo único, en el vector a. Así, mediante la fórmula $z' = z + a$ puede

transformarse no sólo un punto aislado sino toda una figura (un conjunto de puntos). Esta transformación se reduce al desplazamiento de la figura en el vector a. Esta nueva figura deberá, por supuesto, ser igual (congruente) a la original.

18. A cada punto z de la figura P puede aplicársele la fórmula $z' = cz$. Si c es un número real positivo, cada punto z de la figura P se transforma en un nuevo punto z', situado en el mismo rayo en que se encuentra z y que sale de A. Además, la relación $\frac{|z'|}{|z|}$ (es decir, la relación entre las distancias de los puntos z' y z hasta A) es igual a c. En geometría esta trasformación recibe el nombre de *homotecia*, los puntos z' y z se denominan *puntos homotéciços*, el punto A *centro de homotecia* y el número c *coeficiente de homotecia.*

Como resultado de la homotecia el *conjunto* de todos los puntos de la figura P se convierte en un nuevo conjunto de puntos que componen la figura P' (dib. 23). Esta *figura* es denominada



DIB. 23

homotécica de la figura dada P. Es fácil ver que en el caso cuando P es un polígono (por ejemplo, un triángulo), la figura homotécica P' es también un polígono, semejante a P. Para demostrar esto es suficiente examinar en qué se transforman, en el caso de la homotecia, los puntos que se encuentran en el lado BC del polígono P (dib. 23).

Si B se transforma en B' y C en C', entonces uniendo B' con C'

mediante un segmento de recta hallamos que los triángulos ABC y $AB'C'$ son semejantes (el ángulo A es común y los lados que lo forman son proporcionales: $\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=c\Big)$. De aquí se deduce, luego que el lado $B'C'$ es paralelo a BC y que $\frac{B'C'}{BC}=c$. Sea K un punto perteneciente a BC; en este caso el rayo AK cortará $B'C'$ en cierto punto K'; los triángulos AKC y $AK'C'$ serán nuevamente semejantes y, por consiguiente, $\frac{AK'}{AK}=\frac{AC'}{AC}=c$. Por lo tanto, el punto K' será homotécico para el punto K (respecto del centro A, siendo el coeficiente de homotecia igual a c). De aquí deducimos que todos los puntos pertenecientes al lado BC se transforman, en el caso de la homotecia, en los puntos del lado $B'C'$; con esto, cada punto de $B'C'$ será homotécico de uno de los puntos pertenecientes a BC. De este modo, todo el *segmento* $B'C'$ será *homotécico* del segmento BC. Repitiendo este razonamiento para todos los lados del polígono P veremos que todos ellos se transforman en los lados del nuevo polígono P', siendo que los lados respectivos serán paralelos por pares y la relación entre sus longitudes será igual a un mismo número c:

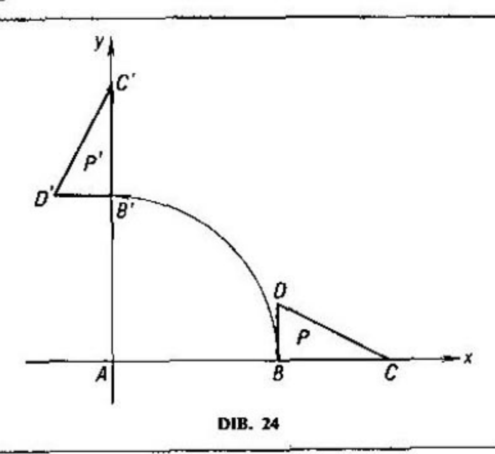
$$\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'B'}{DB}=c.$$

De este modo se demuestra la *semejanza de las figuras homotécicas* P y P'.

Así es que mediante la fórmula $z'=cz$ (donde c es un número real positivo), es posible no solamente transformar un punto sino una figura entera P. Esta transformación es la homotecia con centro A y coeficiente igual a c. En el caso cuando P es un polígono, la figura transformada P' es también un polígono, semejante a P.

19. Sea ahora que el número c, en la fórmula $z'=cz$, no es un número positivo. Supongamos al principio que $|c|=1$. En este caso toda la operación de multiplicación se reduce al giro del vector Az en torno al punto A, en un ángulo igual al argumento de z. Si esta operación se efectúa con cada uno de los puntos z de la figura P, como resultado, toda la figura P resultará girada alrededor del punto A, en el ángulo $\operatorname{Arg} c$. Por consiguiente, con ayuda de la fórmula $z'=cz$, donde $|c|=1$, toda la figura P se

transforma en la figura P', obenida de P mediante el giro en torno al punto A, en el ángulo $\operatorname{Arg} c$. Tomemos, por ejemplo, $c = i$; como $\operatorname{Arg} i = 90°$, la transformación $z' = iz$ se reduce al giro de la figura en 90°, en torno al punto A. En el dib. 24 puede verse que ocurre con el triángulo al efectuar esta transformación.



DIB. 24

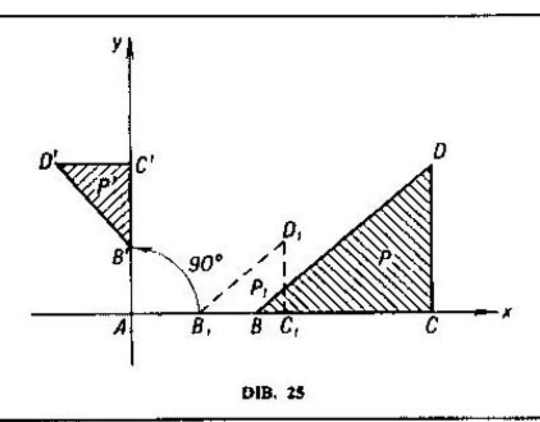
Si en la fórmula $z' = cz$ no se da la condición $|c| = 1$, sino que se considera simplemente que c es cualquier número complejo (no positivo y diferente de cero), la transformación respectiva de la figura P puede efectuarse en dos etapas. Primero hay que efectuar el alargamiento en $|c|$ veces como resultado de lo cual la figura P se convierte en la figura homotécica P_1 y luego girar P_1 en torno al punto A en el ángulo $\operatorname{Arg} c$.

En el dib. 25 se muestra que ocurrirá con el triángulo P al transformar $z' = \frac{i}{2} z$ $\left(\text{aquí } \left|\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2} \text{ y } \operatorname{Arg} \frac{i}{2} = 90°\right)$.

20. En las fórmulas $z' = z + a$ y $z' = cz$, z puede ser considerada como *variable independiente* y z' como *función*. Esta es la más sencilla *función de la variable compleja* z. Efectuando con z y otros números complejos constantes cualesquiera las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, así como también elevando a potencia (esta última operación se considera como multiplicación repetida), obtendremos otras funciones de z diferentes, por ejemplo,

$$z' = \frac{1}{z}, \quad \text{o} \quad z' = z^2 + cz + d, \quad \text{o} \quad z' = \frac{z-a}{z-b}, \text{ etc.}$$

Todas las funciones de variable compleja se denominan *racionales*; se las llama así porque las mismas operaciones con ayuda de las cuales se determinan estas funciones (suma, resta, multiplicación y división) se denomina *racionales*. Con las *funciones racionales* no se agotan todas las funciones de variable compleja; por ejemplo, es posible definir y estudiar las funciones tipo $z' = \sqrt[n]{z}$, $z' = a^z$, $z' = \text{sen}\, z$, etc. Sin embargo, en este libro sólo trataremos de las funciones racionales más sencillas.



DIB. 25

21. Hemos visto que a las funciones $z' = z + a$ o $z'' = cz$ les corresponden las transformaciones geométricas determinadas de las figuras en el plano. Precisando, si la variable z toca todos los puntos de la figura P, la función $z' = z + a$ tocará los puntos de la figura P' que se obtendrá de P mediante el desplazamiento en el vector a, mientras que la función $z'' = cz$ pasa por los puntos de la figura P'' que se obtiene de P mediante la transformación de la homotecia con coeficiente $|c|$ y el giro alrededor del punto A el ángulo Arg c. Por consiguiente, puede decirse que la misma función $z' = z + a$ efectúa el desplazamiento, la función $z' = cz$ *efectúa la transformación de homotecia* y el giro (si c es un número real positivo, esto sólo se reduce a una homotecia y si $|c| = 1$, pero $c \neq 1$, sólo a un giro). Surge la pregunta: ¿qué es posible decir sobre las transformaciones efectuadas por otras funciones de variable compleja y, en particular, por las funciones racionales? De esta cuestión nos ocuparemos en las páginas que siguen. Pero, para que el lector comprenda que esta tarea no será un «juego»,

le informaremos desde ahora que las transformaciones que efectúan las funciones racionales de variable compleja, diferenciándose por su extraordinaria variedad y por la riqueza de sus propiedades geométricas, poseen, junto con ello, algo en común. Justamente aunque con estas transformaciones en general varían el tamaño y la forma de la figura, quedan invariables, sin embargo, las magnitudes de los ángulos entre cualesquiera líneas pertenecientes a la figura estudiada *).

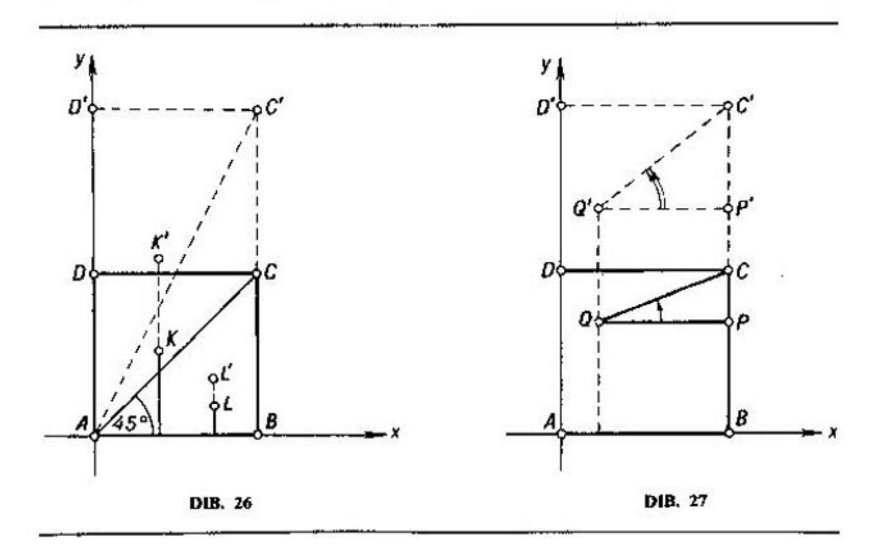
En casos particulares de las funciones $z' = z + a$ y $z'' = cz$ la invariabilidad de los ángulos en las figuras a transformar se deduce directamente de que aquí se trata de transformaciones de desplazamiento (traslación), homotecia o giro. Lo extraordinario consiste en que este fenómeno se observa también para las transformaciones efectuadas por medio de todas funciones racionales de variable compleja y mediante muchas otras funciones de variable compleja más generales y complicadas, llamadas analíticas. Acerca de estas últimas no podemos, sin embargo, referirnos en este pequeño libro.

22. Las transformaciones geométricas con las cuales no varían los valores de los ángulos entre dos líneas cualesquiera contenidas de la figura a transformar son denominadas *transformaciones conformes* y aún con mayor frecuencia *representaciones conformes*.

Como ejemplo de representaciones conformes pueden servir el desplazamiento, la homotecia y el giro antes examinados. Más adelante se dan otros ejemplos. Ahora mostraremos que significa la condición, presente en la definición de representación conforme de que no varíen los ángulos entre dos líneas *cualesquiera* de la figura a estudiar. Examinemos el cuadrado $ABCD$ adyacente a los ejes Ax y Ay (dib. 26). Transformémoslo en otra figura de modo tal que quede invariable la abscisa x de cada punto, mientras que la ordenada y aumenta el doble. En este caso, por ejemplo, el punto K se transforma en K' y L, en L'. Si se transforman de este modo todos los puntos del cuadrado, evidentemente el cuadrado $ABCD$ se transformará en el polígono $ABC'D'$ con la misma base y el doble de altura. Con esto, el lado AB se transforma en sí mismo (todos los puntos quedan en sus lugares, ya que sus ordenadas eran iguales a cero y después de duplicarlas quedan iguales a cero), AD se transforma en AD', DC en $D'C'$ y BC en BC'.

*) Hablando en rigor, aquí pueden haber puntos tales que los ángulos cuyos vértices coincidan precisamente con esos puntos, varíen aumentando en dos, tres o más números enteros de veces. Pero esos puntos son sólo excepciones de la regla general.

Sin duda, los ángulos entre los lados que eran rectos lo seguirán siendo, es decir, no varían. Examinemos, no obstante, el ángulo *BAC* entre el lado *AB* y la diagonal *AC* de nuestro cuadrado (dib. 26); este ángulo es igual a 45°. Como resultado de la



DIB. 26

DIB. 27

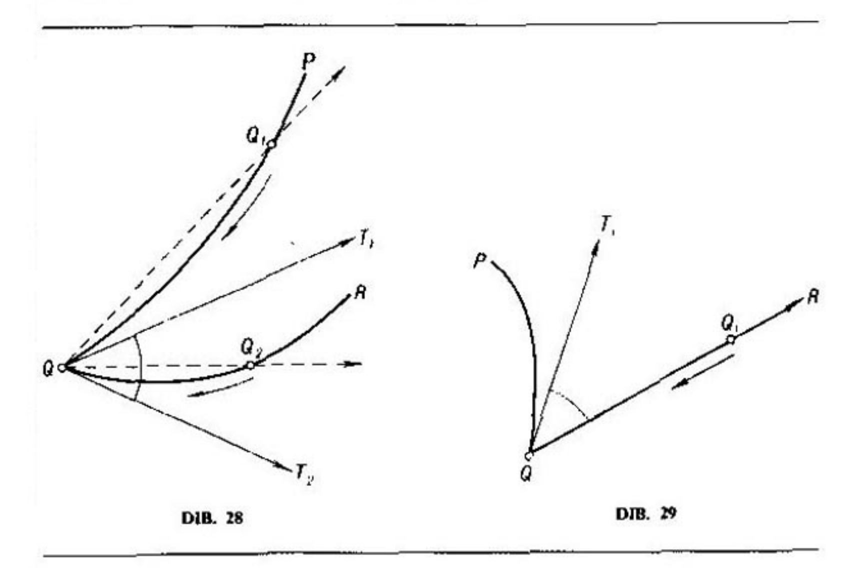
transformación, el lado *AB* queda en su lugar, mientras la línea *AC* se transforma en la línea *AC'* (¿por qué?). Por consecuencia, el ángulo *BAC* se transforma en otro ángulo (mayor), el *BAC'*, es decir, no queda invariable. Si en vez del ángulo *BAC* se toma el ángulo *PQC*, con vértice situado en otro punto (arbitrario) *Q* del cuadrado *ABCD* (dib. 27), será fácil demostrar que este ángulo varía también con la transformación examinada.

Do todo esto se saca la siguiente conclusión: aunque los ángulos del mismo cuadrilátero *ABCD* no varían con la transforción a examinar (ellos eran y siguen siendo rectos), ésta no es una transformación conforme, ya que para *todo punto* perteneciente al *ABCD* es posible indicar un ángulo, con vértice en este punto, que *varía* (aumenta) al efectuar esta transformación.

23. Antes de proseguir es necesario aclarar al lector que es lo que precisamente se entiende como ángulo entre dos líneas curvas *QR* y *QP* que se cortan en cierto punto *Q* (dib. 28).

Tomemos en la curva *QP* un punto cualquiera Q_1, diferente de *Q* y tracemos la secante QQ_1. Del mismo modo en la curva

QR tomemos el punto Q_2, diferente de Q y tracemos la secante QQ_2. El valor del ángulo Q_1QQ_2 puede aceptarse como valor aproximado del *ángulo curvilíneo* PQR. Cuanto más cerca del punto Q estén situados los puntos Q_1 y Q_2, las secantes pasarán tanto



DIB. 28

DIB. 29

más estrechamente a las curvas QP y QR, en las cercanías del punto Q. Es por ello que el ángulo Q_1QQ_2 puede entonces tomarse como más y más aproximado al valor del ángulo que forman nuestras curvas en el punto Q. Si Q_1 se desplaza por la curva QP y Q_2 por la curva QR, acercándose ilimitadamente a Q, las secantes QQ_1 y QQ_2 giran alrededor del punto Q, acercándose a la posición límite QT_1 y QT_2. Los rayos QT_1 y QT_2 son más estrechamente adyacentes a nuestras curvas cerca de este punto que cualesquiera otros rayos que pasen por Q. Estos se denominan *tangentes a las curvas* QP y QR, mientras que el ángulo T_1QT_2 entre ellas se toma como medida del ángulo en el punto Q entre las curvas QP y QR. Se llama *ángulo entre dos curvas que se cortan en cierto punto el ángulo entre las tangentes a la curva, trazadas en ese punto.*

Esta definición es válida para el caso del ángulo formado en el punto Q por cierta curva QP y la recta QR (dib. 29). Sea QT_1 la tangente a QP en el punto Q. Para emplear la definición hay

que sustituir la recta QR por su tangente. Pero es fácil comprender que la *tangente a la recta* QR coincide con esta misma recta. En realidad, para obtener la secante debe tomarse en QR el punto Q_1, diferente de Q y trazar la recta que pase por Q y Q_1. Evidentemente, ésta será la misma recta QR. Si Q_1 tiende a Q, la secante que hemos obtenido queda invariable. Por ello, la tangente, que es la posición límite de la secante, resulta nuevamente la recta QR. Por consiguiente, debe entenderse como ángulo entre la curva QP y la recta QR el ángulo entre la tangente QT_1 a la curva QP en el punto Q y la misma recta QR. Puede ocurrir que QR sea la tangente a QP (es decir, que QR coincida con QT_1); entonces el ángulo entre QR y QP se hace cero. Por consiguiente, el ángulo en el punto Q entre la curva y la tangente a ella, trazada por ese punto, es igual a cero.

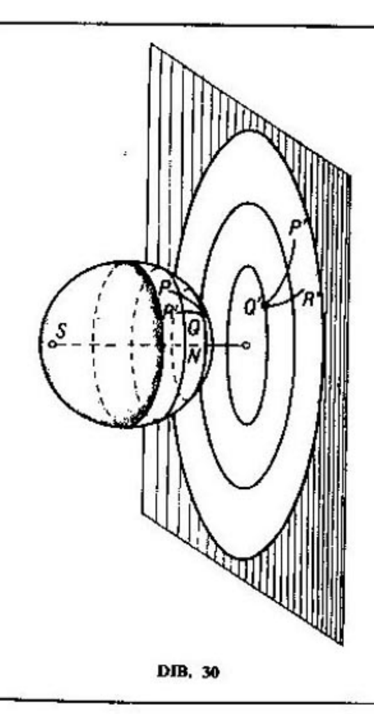
24. Las representaciones conformes tienen múltiples aplicaciones. Por ejemplo, ellas se emplean en cartografía durante el trazado de mapas geográficos.

Cada mapa geográfico es la representación de una parte de la superficie terrestre en el plano (en la hoja de papel). En el caso de tal representación los contornos de los continentes, mares y océanos sufren mayor o menor deformación. El lector puede convencerse fácilmente que resulta imposible sobreponer en el plano un trozo de superficie esférica (por ejemplo, un trozo de una pelotilla de tenis de mesa rota), sin alargamientos ni compresiones, sin roturas ni pliegues. Por esta misma causa es imposible representar en el plano una parte de la superficie terrestre (a la que puede considerarse como una esfera) sin deformación de las proporciones y, por lo tanto, sin infringir la forma, es decir, trazar un mapa. No obstante, puede trazarse un mapa sin variar las magnitudes de los ángulos entre diferentes líneas de la superficie terrestre.

Supongamos que debe trazarse un mapa del hemisferio norte en el que todos los ángulos entre las diferentes direcciones sobre la corteza terrestre se dan en tamaño natural. Para representarnos claramente como puede lograrse esto imaginémosnos un gran globo terráqueo de material transparente, por ejemplo, de vidrio, recubierto con una capa de pintura opaca de modo tal que sólo queden transparentes los contornos de los continentes, países y mares situados en el hemisferio norte, y también la red de meridianos y paralelos. Si en el polo sur del globo se fija una lamparilla eléctrica, pequeña pero intensa y frente al globo, en forma perpendicular a su eje, se ha colocado una pantalla, entonces,

en una habitación oscura veremos sobre la pantalla el mapa mudo del hemisferio norte. Es posible demostrar geométricamente que en tal mapa, (ella se denomina *mapa en proyección estereográfica*) todos los ángulos entre cualesquiera líneas en el globo, en el hemisferio norte, se dibujan en tamaño natural.

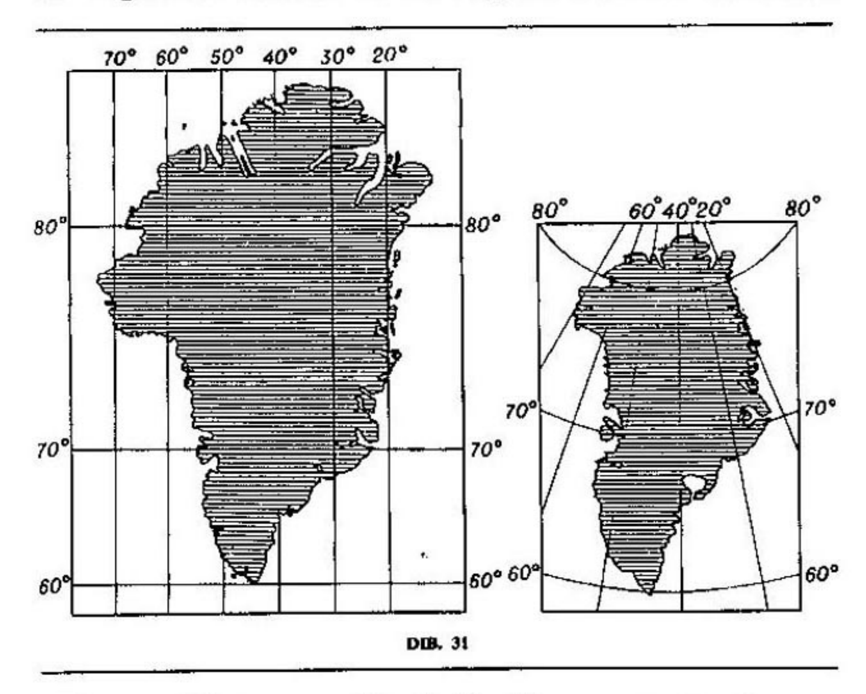
Si se deja sin pintar el lado (curvilíneo) de un ángulo cualquiera *PQR* con vértice en cualquier punto del hemisferio norte, en la proyección estereográfica este ángulo se dibuja en tamañc natural (dib. 30).



DIB. 30

25. Hemos explicado como es posible obtener el mapa del hemisferio norte conservando la magnitud natural de todos los ángulos. Si la fuente luminosa (la lámpara), de donde parten los rayos de proyección, se coloca en el polo norte del globo y no en el polo sur, puede así obtenerse el mapa del hemisferio sur, conservando las magnitudes naturales de todos los ángulos. Cada uno de los mapas obtenidos por el método indicado representa

una cierta figura plana; si la sometemos a una representación conforme, se transformará en otra figura la que también puede considerarse mapa geográfico. Como durante la representación conforme los ángulos no varían, en el nuevo mapa se conservarán las magnitudes naturales de los ángulos entre las direcciones



DIB. 31

en la superficie terrestre. En el dib. 31 se representa el mapa de Groenlandia: en la parte derecha, en proyección estereográfica y, en la izquierda, el mapa que se obtiene del precedente si a cada uno de sus puntos se aplica la transformación según la fórmula:

$$z' = \log_e |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Aquí, como base de logaritmos se toma el número neperiano $e = 2{,}71828...$, y $\operatorname{Arg} z$ se mide no en grados sino en radianes.

Sin dudas, esta fórmula tiene aspecto complejo y artificial. No tenemos posibilidades de examinarla en detalle y comprobar que la transformación efectuada por esta fórmula es, en realidad, conforme. Diremos, solamente, que el mapa obtenido como resul-

tado de esa transformación fue trazado por el científico flamenco Mercator hace ya 400 años. Desde entonces el mismo se emplea ampliamente en la navegación. Sus ventajas respecto del mapa trazado en proyección estereográfica consiste en que aquí no sólo los meridianos sino también los paralelos se representan como líneas rectas, representándose también como líneas rectas todos los recorridos sobre la superficie de la Tierra, a lo largo de los cuales la aguja del compás conserva su dirección invariable (las llamadas loxodromias).

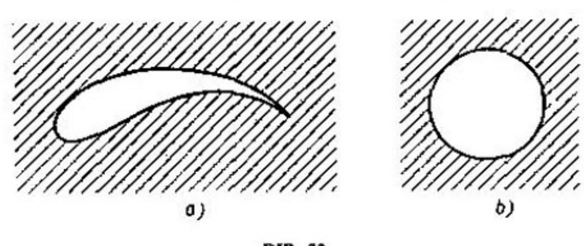
26. Las aplicaciones más importantes de las representaciones conformes están relacionadas con problemas de la física y la mecánica. En muchos casos, cuando se trata, por ejemplo, del potencial eléctrico en los puntos del espacio que rodea un condensador cargado o de la temperatura dentro de un cuerpo caliente o de las velocidades de las partículas de líquido o gas en una corriente que fluye por un cierto canal, y que contornea al mismo tiempo ciertos obstáculos, etc, es necesario poder calcular el potencial, la temperatura, la velocidad, etc. Este tipo de problemas puede resolverse sin grandes dificultades cuando los cuerpos que en ellos se consideran posean forma suficientemente sencilla (por ejemplo, placas planas o cilindros circulares). Sin embargo, es necesario saber efectuar el cálculo en muchos otros casos. Por ejemplo, para poder efectuar los cálculos correspondientes al diseñar un avión se debe saber calcular la velocidad de las partículas de aire en la corriente que contornea el ala del avión *).

El corte transversal del ala del avión (o perfil del ala) posee la forma expuesta en el dib. 32, *a*. Pero, por otra parte, el cálculo de velocidades se efectúa con suma facilidad si el corte transversal del cuerpo aerodinámico es un círculo (es decir, cuando el cuerpo mismo es un cilindro circular) (dib. 32, *b*).

Así, resulta que para reducir el problema relacionado con las velocidades de las partículas de la corriente de aire, que contornea el ala del avión, al problema más sencillo del contorneo de un cilindro circular, es suficiente efectuar la representación conforme de la figura sombreada en el dib. 32, *a* (*parte exterior del ala*) en la figura sombreada del dib. 32, *b* (*el exterior de una circun-*

*) Durante el vuelo del avión se desplazan tanto las partículas de aire como la misma ala. No obstante, basándose en las leyes de la mecánica se puede reducir la investigación al caso en que el ala es inmóvil, mientras que la corriente de aire avanza hacia el ala y la contornea.

ferencia). Esta representación se lleva a cabo por medio de una cierta función de variable compleja. Conociendo esta función es posible pasar de las velocidades en la corriente que contornea un cilidro circular a las velocidades en la corriente que contornea el ala del avión y, por consiguiente, resolver totalmente el problema planteado.

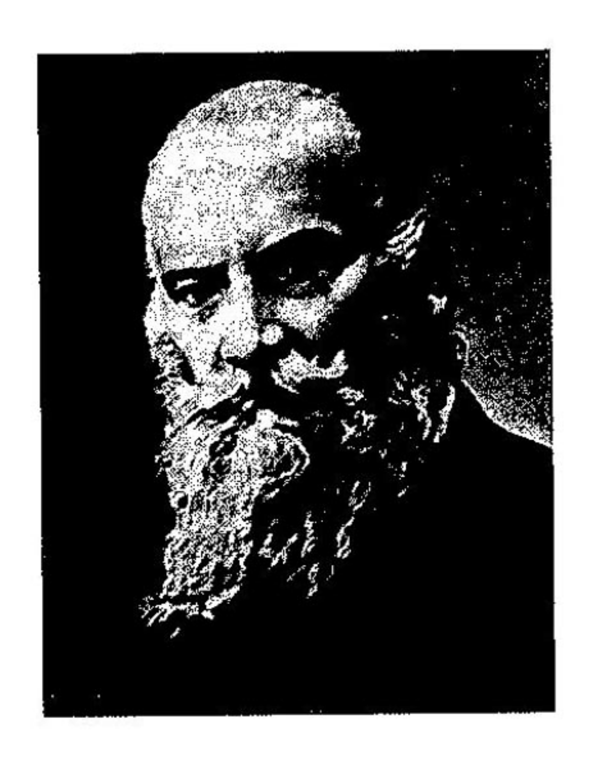


DIB. 32

La representación conforme permite, de modo análogo, reducir la resolución de los problemas relacionados con el cálculo del potencial eléctrico y las temperaturas en el caso de cuerpos de forma arbitraria (cualquier perfil de corte) al caso más sencillo, donde el problema ya ha sido resuelto. El paso inverso al espacio que contornea los cuerpos electrizados (o calentados) originalmente dados, se alcanza con ayuda de la misma función de variable compleja que efectúa la representación conforme.

27. Todo lo dicho acerca de la aplicación de la representación conforme en problemas de cartografía, mecánica y física no fue acompañado por ninguna demostración. En este libro no podremos dar estas demostraciones ya que su comprensión exigiría del lector conocimientos que sólo se dan en los Centros de enseñanza superior.

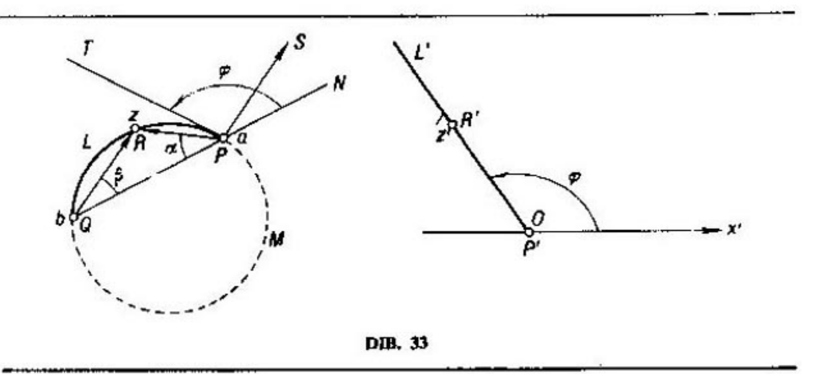
Ahora, hasta el final de este libro, nos ocuparemos de las funciones racionales más sencillas, con ayuda de las cuales es posible efectuar algunas representaciones conformes. He aquí las funciones a que nos referimos: 1) $z' = \dfrac{z - a}{z - b}$ (llamada *función fraccionaria lineal*); 2) $z' = z^2$; 3) $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$. La última lleva



NIKOLAY EGOROVICH ZHUKOVSKY (1847–1921) UTILIZÓ AMPLIAMENTE LOS NÚMEROS COMPLEJOS Y REPRESENTACIONES CONFORMES PARA EL CÁLCULO DE AVIONES

el nombre del conocido científico soviético Nikolai Egórovich Zhukovski (1847 – 1921), a quien V. I. Lenin llamara con justicia «padre de la aviación rusa». Se denomina la misma *función de Zhukovski* debido a que N. E. Zhukovski la aplicó exitosamente para resolver ciertos problemas relacionados con la aeronáutica; en particular, él mostró cómo pueden obtenerse, con ayuda de esa función, ciertos perfiles de ala de avión que presentan valor tanto teórico como práctico.

Más adelante retornaremos a este aspecto de la aplicación de la función de Zhukovski.



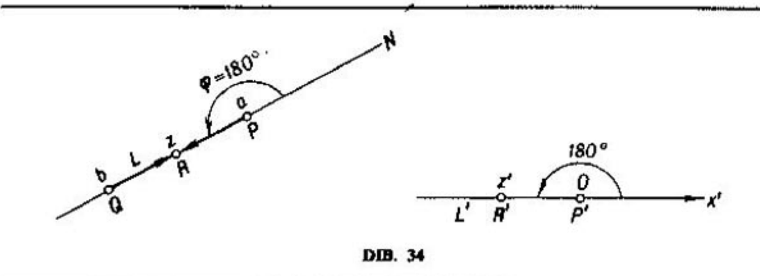
DIB. 33

28. Comencemos con la función fraccionaria lineal $z' = \frac{z-a}{z-b}$. Aquí a y b son números complejos desiguales. Demostremos que mediante esta función cada arco PLQ de la circunferencia que une los puntos a y b se transforma en cierto rayo rectilíneo $P'L'$ que parte del origen de coordenadas y, además, el ángulo entre la dirección positiva del eje real y este rayo es igual al ángulo entre la dirección baN y la *tangente al arco de circunferencia* en el punto a (dib. 33).

Supongamos que el punto z está situado en el arco PLQ (dib. 33, izguierda); demostremos que su representación (es decir, el punto $z' = \frac{z-a}{z-b}$ correspondiente a él debe pertenecer al rayo $P'L'$ (dib. 33, derecha). Para *trazar el vector* z' es necesario conocer la longitud de este vector ($|z'|$) y el ángulo de inclinación entre él y la parte positiva del eje real ($\operatorname{Arg} z'$). Pero z' es el cociente

de los números complejos $z-a$ y $z-b$ representados por los vectores PR y QR. Por ello $|z'| = \frac{|z-a|}{|z-b|}$ y el $\operatorname{Arg} z'$ es igual al ángulo SPR (los vectores PS y QR son iguales), medido en la dirección de PS a PR. Es evidente que $\widehat{SPR} = \widehat{QRP}$ *) y, por consiguiente, se mide con la mitad del arco QMP. La mitad de este arco también sirve para medir el ángulo NPT. Por lo tanto $\operatorname{Arg} z' = \widehat{SPR} = \widehat{QRP} = \widehat{NPT} = \varphi$. Así, para cualquier posición de los puntos z en el arco PLQ los puntos correspondientes $z' = \frac{z-a}{z-b}$ poseen un mismo argumento φ. Y esto significa que todos estos puntos están situados en un mismo rayo $P'L'$ inclinado bajo un ángulo φ hacia la *parte positiva* del eje real.

Esta conclusión también es válida cuando PLQ no es arco de una circunferencia sino un *segmento rectilíneo* PQ. Entonces hay que considerar el ángulo $\varphi = 180°$ y el rayo $P'L'$ coincidente con



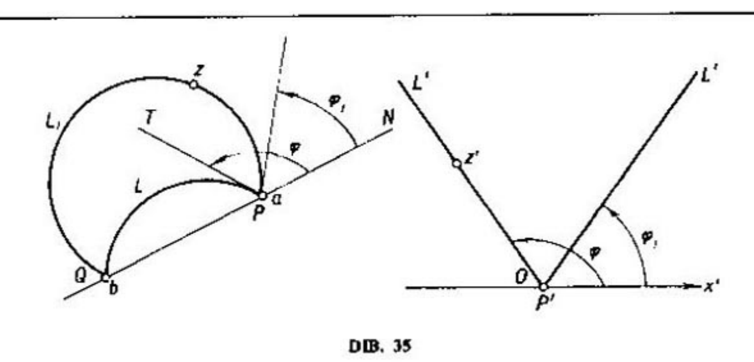
DIB. 34

la parte negativa del eje real (dib. 34). En realidad, si z está situado en el segmento PQ, los vectores que representan a $z-a$ y $z-b$, están contrariamente orientados. De aquí se deduce que el cociente $z' = \frac{z-a}{z-b}$ es un *número real negativo*, es decir, z' está situado en la parte negativa del eje real. •

Hemos demostrado que las representaciones de los puntos del arco PLQ están situadas en el rayo $P'L'$. Pero ¿éstas llenan todo el rayo $P'L'$ o en este último hay puntos que no son la representación de ninguno de los puntos del arco PLQ? Demostremos que las representaciones llenan todo el rayo.

*) La notación $\widehat{ABC}$ significa: ángulo ABC.

Empecemos con el punto P' (el origen de coordenadas); este punto es la representación del punto P, ya que $z' = \frac{z-a}{z-b}$ es igual a cero cuando $z = a$. Tomemos un punto z' cualquiera en el rayo $P'L'$ (dib. 35), diferente de P' (es decir, $z' \neq 0$). Resulta evidente que z' no puede ser un número real positivo, ya que el rayo $P'L'$ no coincide con la parte positiva del eje real.



DIB. 35

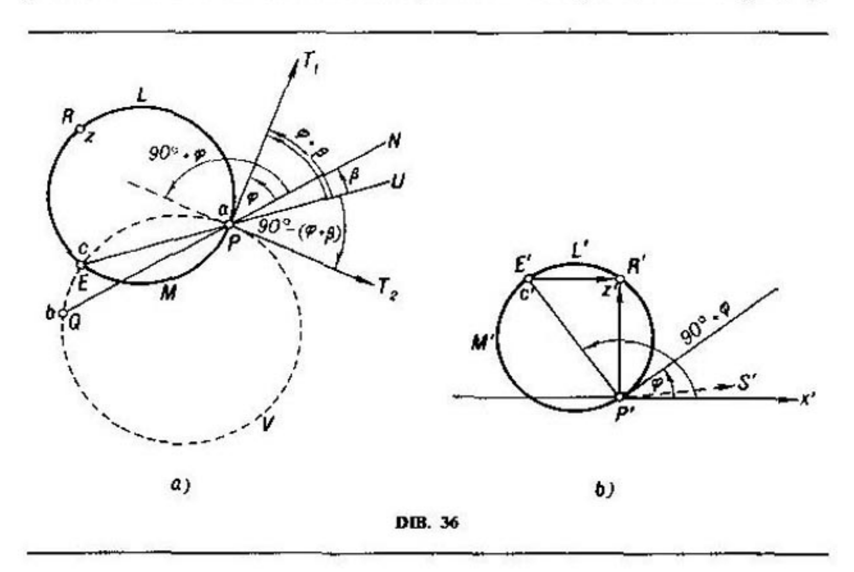
Tomando z como incógnita, resolvamos la ecuación $z' = \frac{z-a}{z-b}$ respecto a z; hallamos que $zz' - z'b = z - a$, de donde $z = \frac{z'b - a}{z' - 1}$. Así, para cada punto z' perteneciente al rayo $P'L'$ existe un valor y sólo uno de z tal que $z' = \frac{z-a}{z-b}$, es decir, tal que z' sea la representación de z. Pero ¿dónde está situado este punto z? ¿Puede ser que no se encuentre en PLQ? Cerciorémonos de que esto es imposible. Antes que nada, el punto z no puede estar situado en la recta que es la prolongación del segmento PQ (fuera de este segmento). En caso contrario los argumentos de los números $z - a$ y $z - b$ hubieran sido iguales y $z' = \frac{z-a}{z-b}$ hubiera sido un número positivo. Pero si z no está situado en la recta indicada fuera del segmento PQ, entonces P y Q pueden unirse mediante un arco de circunferencia de modo tal que este arco pase por z (si suponemos que el punto z está situado en el

segmento PQ, en vez de un arco conviene tomar ese mismo segmento). Designemos este arco por PL_1Q; como éste es diferente de PLQ, su tangente en el punto P formará con la dirección baN el ángulo φ_1, diferente de φ (dib. 35). Por eso, el valor de la función $z' = \frac{z-a}{z-b}$ en este punto debe representarse por un punto del rayo $P'L'$ inclinado hacia la parte positiva del eje real bajo un ángulo φ_1 y, por consecuencia, no coincidente con $P'L'$. Llegamos a un absurdo, pues obtuvimos que el punto z', diferente del punto P', debe hallarse tanto en el rayo $P'L'$ como en el rayo $P'L'$. Así hemos demostrado que cada punto z' perteneciente a $P'L'$ es la representación de un único punto z $\left(z = \frac{z'b-a}{z'-1}\right)$, donde z pertenece a PLQ. De esa manera, si el punto z' recorre todo el rayo $P'L'$, el punto z correspondiente al primero, determinado de la ecuación $z' = \frac{z-a}{z-b}$, recorrerá el arco PLQ.

Al fin demostremos que si z describe el arco PLQ, desplazándose en una misma dirección desde el punto P hacia el punto Q, el punto z' describe el rayo $P'L'$ también en una misma dirección, alejándose infinitamente del punto P'. Para esto es suficiente demostrar que la distancia $P'R' = |z'| = \frac{|z-a|}{|z-b|} = \frac{PR}{QR} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$ (dib. 33), crece con el movimiento indicado del punto z, tomando valores infinitamente grandes. Pero $\varphi + \alpha + \beta = 180°$, de donde $\beta = 180° - (\alpha + \varphi)$, $\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\varphi) = \operatorname{sen}\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\operatorname{sen}\varphi$ y, por consiguiente, $P'R' = |z'| = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\alpha} = \cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{ctg}\alpha$. Cuando el punto z se desplaza por PLQ desde P hacia Q, el ángulo α disminuye desde $180° - \varphi$ hasta cero y el ángulo φ queda invariable. Por lo tanto la $\operatorname{ctg}\alpha$ crece desde el valor $-\operatorname{ctg}\varphi$ hasta $+\infty$ y $|z'| = \cos\varphi + \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{sen}\varphi$ también crece (en virtud del valor positivo del número $\operatorname{sen}\varphi$) desde el valor $\cos\varphi - \operatorname{ctg}\varphi\operatorname{sen}\varphi = 0$ hasta $+\infty$.

29. Examinemos una circunferencia PLM que pasa por el punto a, pero no pasa por el punto b (dib. 36). Sea igual a φ el ángulo entre la tangente en el punto a y la dirección baN. Tracemos una *circunferencia auxiliar* que pase por los puntos a y b, para la cual la tangente en el punto a formará con la dirección baN un ángulo $\varphi + 90°$. Esta circunferencia cortará la *primera circunferencia*

en cierto punto E; designemos con c el número complejo que este punto representa. Demostremos que mediante la función $z' = \frac{z - a}{z - b}$ la circunferencia PLM se transforma en la circunferencia $P'L'M$ (dib. 36) que, toma como diámetro el segmento $P'E'$ donde el punto P' representa el número 0 y el punto E' el número $c' = \frac{c - a}{c - b}$. Con esto la tangente a la circunferencia $P'L'M'$ en el punto P' forma con la dirección positiva del eje real un ángulo φ.



DIB. 36

Así, nos proponemos demostrar que para cada punto z perteneciente a PLM, el punto $z' = \frac{z - a}{z - b}$ correspondiente se halla en la circunferencia $P'L'M'$, para la cual los puntos 0 y $c' = \frac{c - a}{c - b}$ son los extremos del diámetro. Evidentemente, es suficiente demostrar que de cada punto $z' = \frac{z - a}{z - b}$ (si z pertenece a PLM), el segmento $P'E'$ se ve bajo un ángulo recto, es decir, que el ángulo $E'R'P'$

es un ángulo recto*⁾. Pero el ángulo $E'R'P'$ formado por los vectores $E'R'$ y $P'R'$ que representan los números $z'-c'$ y z', es igual al ángulo $S'P'R'$ (los vectores $P'S'$ y $E'R'$ son iguales), medido en la dirección de $P'S'$ a $P'R'$. Este último ángulo es igual al $\operatorname{Arg}\dfrac{z'}{z'-c'}$, por ello, el ángulo $P'R'E'$ que nos interesa también coincide con el argumento del número $\dfrac{z'}{z'-c'}$, es decir, $\widehat{P'R'E'} = \operatorname{Arg}\dfrac{z'}{z'-c'}$. Transformemos la expresión $\dfrac{z'}{z'-c'}$ sustituyendo z' por $\dfrac{z-a}{z-b}$ y c' por $\dfrac{c-a}{c-b}$. Obtendremos:

$$\frac{z'}{z'-c'} = \frac{z-a}{z-b} : \left(\frac{z-a}{z-b} - \frac{c-a}{c-b}\right) =$$
$$= \frac{z-a}{z-b} : \frac{(z-c)(a-b)}{(z-b)(c-b)} = \frac{z-a}{z-c} : \frac{b-a}{b-c} = \frac{z''}{b''}.$$

Aquí tomamos que $\dfrac{z-a}{z-c} = z''$ y $\dfrac{b-a}{b-c} = b''$. Es evidente que z'' es también una función fraccionaria lineal de z. Esta función $z'' = \dfrac{z-a}{z-c}$ se diferencia de nuestra *función inicial* $z' = \dfrac{z-a}{z-b}$ sólo en la sustitución del punto b por el punto c. Para esta nueva función es válido lo desmostrado en el punto 28. O sea, si el punto z se halla en el arco de circunferencia que une a con c, el punto z'' deberá hallarse en un rayo rectilíneo que sale del origen de coordenadas. En este caso si la tangente al arco de circunferencia en el punto a forma con la dirección caU, un cierto ángulo, el rayo rectilíneo forma también con la dirección positiva del eje real un ángulo α; en otras palabras, el argumento z'' es igual a α. Como el punto z se encuentra en el arco de circunferencia PLE, que pasa por los puntos a y c y el ángulo entre la tangente PT_1 a esta circunferencia y la dirección caU es igual a $\beta + \varphi$ (dib. 36, *a*).

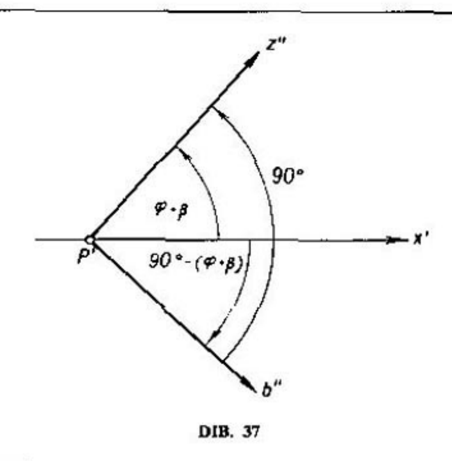
---

*⁾ Porque los puntos del plano, de los cuales el segmento dado se ve bajo un ángulo recto, pertenecen a la circunferencia que tiene como diámetro este segmento.

entonces el argumento del número $z'' = \dfrac{z-a}{z-c}$ también debe ser igual a $\beta + \varphi$ para todas las posiciones de z en el arco *PLE*. Por otra parte, el punto b pertenece al arco *PVE* de la circunferencia que une los puntos a y c. La tangente PT_2 a esta circunferencia forma con la dirección caU, en el punto a, el ángulo $(\beta + \varphi) - 90°$ (el valor absoluto de este ángulo es igual a $90° - (\beta + \varphi)$, pero del dib. 36, *a* se infiere que en nuestro caso se mide en dirección negativa y, por consiguiente, conviene tomarlo con signo menos). Por eso, el valor de la función fraccionaria lineal $\dfrac{z-a}{z-c}$ que corresponde a $z = b$, es decir, el número $b'' = \dfrac{b-a}{b-c}$ debe ser representado por un punto del rayo que parte del origen de coordenadas bajo un ángulo $(\beta + \varphi) - 90°$ respecto de la dirección positiva del eje real, o sea, $\operatorname{Arg} b'' = (\beta + \varphi) - 90°$.

Recordemos que queríamos determinar el ángulo:

$$P'R'E' = \operatorname{Arg} \frac{z'}{z' - c'}.$$



DIB. 37

Hemos hallado que $\dfrac{z'}{z' - c'} = \dfrac{z''}{b''}$ y, a continuación, que

$$\operatorname{Arg} z'' = \beta + \varphi, \quad \operatorname{Arg} b'' = (\beta + \varphi) - 90°;$$

de donde se deduce que $\operatorname{Arg} \frac{z''}{b''} = 90^\circ$ (dib. 37) y

$$\widehat{P'R'E'} = \operatorname{Arg} \frac{z'}{z' - c'} = \operatorname{Arg} \frac{z''}{b''} = 90^\circ.$$

Así, el segmento $P'E'$ se ve desde cada punto $z' = \frac{z-a}{z-b}$, bajo un ángulo recto. Esto significa que el punto z' está situado en la circunferencia $P'L'M'$, cuyo diámetro es el segmento $P'E'$ *⁾.

Aún es necesario demostrar que la tangente a esta circunferencia en el punto P' forma con la dirección positiva del eje real un ángulo φ. Para esto es suficiente demostrar que el ángulo entre el diámetro $P'E'$ y esa dirección del eje es igual a $\varphi + 90^\circ$. Este último ángulo coincide con $\operatorname{Arg} c' = \operatorname{Arg} \frac{c-a}{c-b}$. Pero el punto c está situado en el arco de circunferencia PEQ que une los puntos a y b. Como la tangente a este arco en el punto a forma con la dirección baN el ángulo $90^\circ + \varphi$, el punto $c' = \frac{c-a}{c-b}$ debe situarse en el rayo que también forma con la dirección positiva del eje real el angulo $90^\circ + \varphi$, es decir, $\operatorname{Arg} c' = 90^\circ + \varphi$, que es lo que ha sido necesario demostrar.

30. En calidad de ejemplo hay que examinar en qué se transforma la figura sombreada en el dib. 38, izquierda, al representarla mediante la función $z' = \frac{z-1}{z+1}$. Esta función tiene la forma $\frac{z-a}{z-b}$, siendo $a = 1$ y $b = -1$. Como el arco PLQ pasa por los puntos 1 y -1 y en el punto $a = 1$ forma con la dirección QPN el ángulo φ, según el punto 28 se transforma en el rayo $P'L'$ que

---

*⁾ Durante la demostración nosotros hemos tomado el punto z en el arco PLE; en este caso el punto z' correspondiente se encuentra en la semicircunferencia $P'L'E'$. Si tomamos el punto z en el arco EMP, la demostración no varia; sólo hay que señalar que la dirección de la tangente a este arco en el punto a es contraria a la de PT_1. Esto significa que $\operatorname{Arg} z''$ no será igual a $\beta + \varphi$ sino a $\beta + \varphi - 180^\circ$. Por eso, para el ángulo $\widehat{P'R'E'} = \operatorname{Arg} \frac{z'}{z'-c'}$ obtenemos el valor $(\beta + \varphi - 180^\circ) - (\beta + \varphi - 90^\circ) = -90^\circ$. Esto corresponde a la posición del punto z' en la semicircunferencia $E'M'P'$.

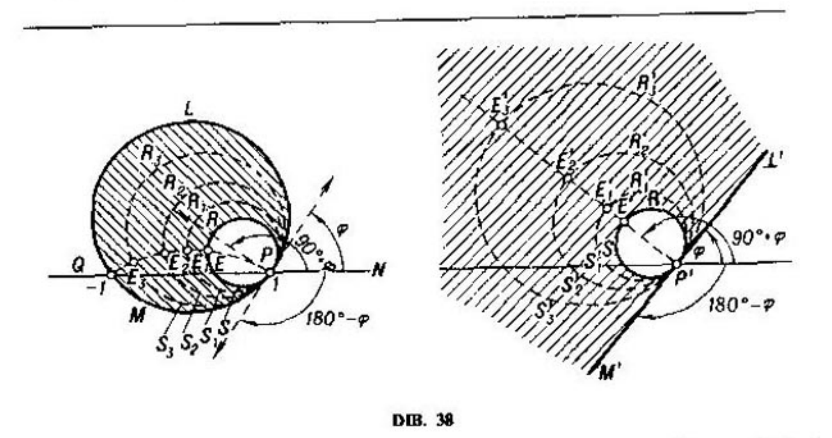
parte del origen de coordenadas y también forma con la dirección positiva del eje real un ángulo φ. El arco PMQ une esos mismos puntos 1 y -1 pero en el punto $a = 1$ forma con la dirección QPN el ángulo $\varphi - 180°$ (el valor absoluto de este ángulo es igual a $180° - \varphi$; sin embargo, hemos tenido en cuenta que él se mide en la dirección de las agujas del reloj, es decir, en dirección negativa). Por ello, la función $z' = \dfrac{z-1}{z+1}$ transforma el ángulo PMQ en el rayo $P'M'$ que entra del origen de coordenadas y forma con la dirección positiva del eje real el ángulo $\varphi - 180°$. Es evidente que los rayos $P'L'$ y $P'M'$ forman en conjunto una recta; por consiguiente, la función $z' = \dfrac{z-1}{z+1}$ transforma toda la circunferencia $PLQM$ (compuesta de los arcos PLQ y PMQ) en toda la recta $M'P'L'$.

Tracemos a través de los puntos P y Q el arco de una circunferencia auxiliar, para la cual la tangente en el punto P forma con QPN el ángulo $\varphi + 90°$. Este arco corta la circunferencia PRS en el punto E. Según el punto 28, el arco PEQ se transforma mediante la función $z' = \dfrac{z-1}{z+1}$ en el rayo entrante del punto P' e inclinado bajo un ángulo $\varphi + 90°$ respecto de la dirección positiva del eje real. Con esto el punto E se transforma en cierto punto E' de este rayo. Según el punto 29, la circunferencia $PRES$ se transforma, por medio de la función $z' = \dfrac{z-1}{z+1}$, en la circunferencia $P'R'E'S'$ que tiene $P'E'$ como diámetro.

Así, como resultado de la transformación, la circunferencia $PLQM$ convierte en la recta $M'P'L'$ mientras la circunferencia $PRES$, tangente interior a la primera, se transforma en la circunferencia $P'R'E'S'$, tangente a la recta $M'P'L'$ en el punto P'. ¿Podemos considerar resuelto el problema de la transformación de la figura sombreada por medio de la función $z' = \dfrac{z-1}{z+1}$? No, este problema aún no ha sido resuelto hasta el final, ya que nosotros sólo hallamos en qué se transforma el contorno de esta figura, y es necesario observar la transformación de los puntos de la figura contenidos entre las circunferencias $PRES$ y $PLQM$.

Para aclarar esta parte del problema, señalemos que toda la

figura sombreada podría llenarse con circunferencias, tangentes a $PLQM$ en el punto P y contenidas entre $PRES$ y $PLQM$. Estas circunferencias cortarán el arco PEQ en los puntos situados entre E y Q. Del número infinito de dichas circunferencias en el dib. 38 se exponen mediante líneas de trazas tres que cortan el



DIB. 38

arco PEQ en los puntos E_1, E_2 y E_3. Si observamos con atención las líneas en que se transforman estas circunferencias mediante la función $z' = \frac{z-1}{z+1}$, podremos darnos una idea acerca de la forma de la figura llenada con todas esas líneas. Esta será la figura transformada.

Pero, empleando las deducciones obtenidas en el punto 29, tenemos que la circunferencia $PR_1E_1S_1$ se transforma en la circunferencia $P'R'_1E'_1S'_1$, la circunferencia $PR_2E_2S_2$ en $P'R'_2E'_2S'_2$, etc.

Al final del punto 28 hemos demostrado que a medida que el punto z se desplaza por el arco PQ, acercándose a Q, el punto z' correspondiente se desplaza por el rayo, alejándose del punto inicial P'. De aquí se deduce que si el punto E_2 está situado más cerca de Q que el punto E_1, E'_2 que es la representación del punto E_2, estará situada en el rayo, pero más lejos de P' que E'_1, la representación del punto E_1. Por esto, el diámetro $P'E'_2$ de la circunferencia $P'R'_2E'_2S'_2$ que es la representación de la circunferencia $PR_2E_2S_2$, debe ser mayor que el diámetro $P'E'_1$ de la circunferencia $P'R'_1E'_1S'_1$ que es la representación de la circunferencia $PR_1E_1S_1$, como se muestra en nuestro dibujo. Si

tomamos una circunferencia $PR_3E_3S_3$ que corte PEQ suficientemente cerca de Q, es posible lograr que su representación $P'R'_3E'_3S'_3$ tenga un diámetro tan grande como se quiera. Además, puede demostrarse que a cualquier circunferencia tangente a la recta $M'L'$ en el punto P' y situada en la parte sombreada del plano (dib. 38, derecha), le corresponde cierta circunferencia tangente a las circunferencias $PRES$ y $PLQM$ en el punto P y que está situada en el interior de la figura sombreada (dib. 38, izquierda). Está claro que todas las representaciones de circunferencias, tales como $PR_1E_1S_1$, $PR_2E_2S_2$, $PR_3E_3S_3$, etc. que llenan la figura sombreada en el dib. 38, izquierda, llenarán a su vez la figura sombreada en el mismo dibujo (lado derecho). Esta es la representación de la figura original al efectuar la representación mediante la función $z' = \frac{z-1}{z+1}$. Así, la función $z' = \frac{z-1}{z+1}$ representa la figura limitada por dos circunferencias (dib. 38, izquierda), en una figura limitada por una recta y una circunferencia (dib. 38, derecha).

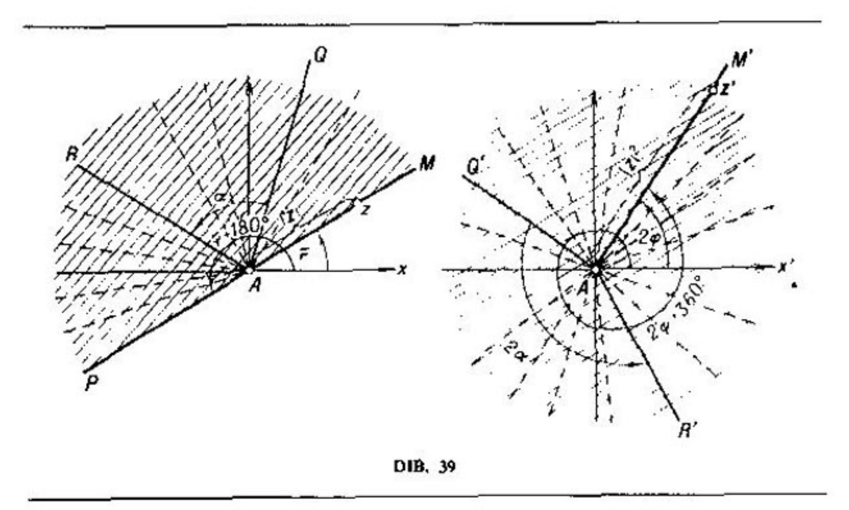
31. Ocupémonos ahora de la transformación por medio de la función $z' = z^2$. En la llamada al pie de la pág. 61, hicimos notar al lector la posibilidad de excepción de la regla general acerca de la conservación de los ángulos al efectuar las transformaciones por medio de funciones racionales y, precisando, que los ángulos con vértices en ciertos puntos exclusivos pueden variar en varias veces. En el caso dado tenemos tal punto exclusivo: el punto A u origen de coordenadas. Demostraremos que con la transformación $z' = z^2$ todos los ángulos con vértice en A aumentan al doble.

Tomemos el rayo AM que parte del punto A y forma un ángulo φ con la parte positiva del eje real (dib. 39). Para cada punto z situado en este rayo, $\operatorname{Arg} z = \varphi$. Como el vector $z' = z^2 = z \cdot z$ se obtiene del vector z mediante su alargamiento en $|z|$ veces y su giro el ángulo $\operatorname{Arg} z = \varphi$, entonces, $|z'| = |z| \cdot |z| = |z|^2$ y $\operatorname{Arg} z' = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z = 2\varphi$. Por eso, el punto z' deberá estar situado en el rayo $A'M'$ que parte del punto A' y forma con la parte positiva del eje real el ángulo 2φ. Si el punto z se desplaza por AM a partir del punto A, alejándose ilimitadamente de ella, el punto z' respectivo se desplazará por $A'M'$ a partir del punto A' alejándose ilimitadamente de ella; con esto, la distancia de z' a A' siempre será igual al cuadrado de la distancia de z a A ($|z'| = |z|^2$).

De aquí se deduce que la función $z' = z^2$ transforma el rayo AM en el rayo $A'M'$, inclinado respecto del eje $A'x'$ bajo un ángulo igual al doble respecto del ángulo de inclinación originario.

Es fácil entender que el rayo AP que forma con Ax el ángulo $\varphi + 180°$ (AM y AP pertenecen a una misma recta), se transforma, por medio de la función $z' = z^2$, en ese mismo rayo $A'M'$. En efecto, si se duplica el ángulo $\varphi + 180°$ se obtiene $2\varphi + 360°$; bajo este ángulo, el rayo inclinado hacia $A'x'$ coincide con $A'M'$.

Veamos en qué se transforma debido a la función $z' = z^2$ la figura sombreada en el dib. 39, izquierda que se denomina



DIB. 39

semiplano. Es posible considerar el semiplano como formado por innumerable cantidad de rayos que parten de A' y están inclinados respecto de Ax bajo ángulos mayores que φ pero menores que $\varphi + 180°$. Los rayos AM y AP forman el límite del semiplano (una recta); no obstante, no vamos a adjuntar estos rayos al mismo semiplano. La función $z' = z^2$ transforma los rayos pertenecientes al semiplano en todos los rayos posibles que parten de A' y que están inclinados hacia $A'x'$ bajo ángulos mayores de 2φ pero menores de $2\varphi + 360°$.

De aquí se deduce que el semiplano limitado por los rayos AM y AP se transforma en la figura limitada por un solo rayo, el rayo $A'M'$ (dib. 39, derecha). Esta última figura puede caracterizarse como un plano del que se ha exluido el rayo $A'M'$. Expresándonos de este modo queremos subrayar que esta figura está formada por todos los puntos del plano excepto aquellos puntos que pertenecen a $A'M'$. Si en el semiplano tomamos dos rayos cualesquiera AQ

y AR, inclinados respecto de Ax bajo los ángulos φ_1 y φ_2 ($\varphi_2 > \varphi_1$), ellos forman entre sí el ángulo $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$. Como resultado de la transformación $z' = z^2$ estos rayos se convierten en $A'Q'$ y $A'R'$ inclinados bajo los ángulos $2\varphi_1$ y $2\varphi_2$ respecto de $A'x'$. Es evidente que el ángulo $Q'A'R'$ es igual a $2\varphi_2 - 2\varphi_1 = 2(\varphi_2 - \varphi_1) = 2\alpha$.

De ese modo, los ángulos con vértice en A se doblan con la transformación $z' = z^2$ ó, en otras palabras, en el punto A se transgrede la «conformidad» de la representación.

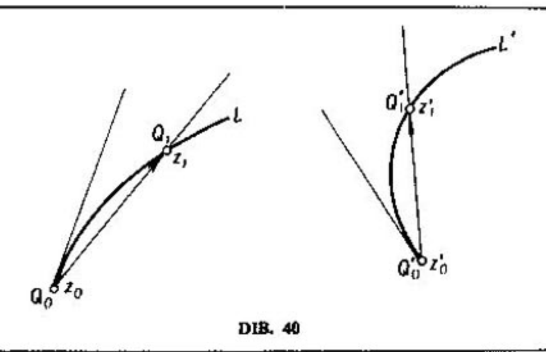
32. Mostremos que los ángulos con vértice en cualquier punto $z_0 \neq 0$ no varían con la transformación $z' = z^2$. De aquí se inferirá que el origen de coordenadas es el único punto en el que se altera la conformidad al efectuar esta transformación.

Sea L una curva cualquiera que parte del punto z_0. Si tomamos en L un punto z_1, diferente de z_0, la dirección de la secante que une z_0 y z_1 coincidirá con la dirección del vector Q_0Q_1 que representa la diferencia $z_1 - z_0$ (dib. 40, izquierda). Mediante la función $z' = z^2$ la curva L se transforma en cierta curva L' y los puntos z_0 y z_1 en nuevos puntos, $z'_0 = z_0^2$ y $z'_1 = z_1^2$, situados en la curva L'. Es evidente que la dirección de la secante que une z'_0 y z'_1 coincide con la dirección del vector $Q'_0R'_1$, que representa la diferencia $z'_1 - z'_0$ (dib. 40, derecha). Comparemos entre sí las direcciones de las dos secantes; para esto es suficiente comparar entre sí las direcciones de los vectores $z'_1 - z'_0$ y $z_1 - z_0$. Ya que el ángulo entre ellos, medido desde el vector $z_1 - z_0$ hacia el vector $z'_1 - z'_0$, coincide con el argumento del cociente $\dfrac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0}$ toda la comparación se reduce al cálculo del $\operatorname{Arg} \dfrac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0}$. El cociente $\dfrac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0}$ puede transformarse, sustituyendo z'_1 y z'_0 por sus expresiones $z'_1 = z_1^2$ y $z'_0 = z_0^2$. Obtenemos:

$$\frac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0} = \frac{z_1^2 - z_0^2}{z_1 - z_0} = z_1 + z_0 \quad \text{y} \quad \operatorname{Arg} \frac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0} = \operatorname{Arg}(z_1 + z_0).$$

Por consecuencia, el ángulo entre las direcciones de los secantes a las curvas L' y L, trazadas por los correspondientes pares de puntos z_0 y z_1 (en L) y $z'_0 = z_0^2$ y $z'_1 = z_1^2$ (en L') es igual a $\operatorname{Arg}(z_1 + z_0)$. Pasando de las secantes a las tangentes, acercaremos ilimitadamente, por la curva L, el punto z_1 al punto z_0. En este

caso, también el punto $z'_1 = z_1^2$, por la curva L', tenderá ilimitadamente al punto $z'_0 = z_0^2$. Por eso, nuestras secantes también se acercarán ilimitadamente a las tangentes trazadas por los puntos z_0 y z'_0 y el ángulo entre las secantes al ángulo entre las tangentes. Pero el ángulo entre las secantes es igual a $\text{Arg}(z_0 + z_1)$ y cuando z_1 tiende a z_0 éste tiende a $\text{Arg}(2z_0)$; además este último coincide con $\text{Arg}\, z_0$. Así, el ángulo entre las tangentes a las curvas L' y L trazadas en los puntos correspondientes $z'_0 = z_0^2$ y z_0 es igual a $\text{Arg}\, z_0$. Si, por ejemplo, $z_0 = 2$, entonces $\text{Arg}\, z_0 = 0$; de aquí se



DIB. 40

deduce que la dirección de la tangente en el punto $z_0 = 2$ a cualquier curva L, trazada por este punto, coincidirá con la dirección de la tangente en el punto $z'_0 = z_0^2 = 4$ a la curva L' en que la función $z' = z^2$ transforma la curva L. Si $z_0 = i$, entonces, el $\text{Arg}\, z_0 = 90°$, por consiguiente, la tangente en el punto $z_0 = i$ a cualquier curva L trazada por este punto y la tangente en el punto $z_0^2 = i^2 = -1$ a la representación de la curva L', son perpendiculares entre sí.

Volviendo al caso general, podemos decir que cuando las curvas que pasan por el punto z_0 se transforman por medio de la función $z' = z^2$ las tangentes giran un ángulo igual al $\text{Arg}\, z_0$.

Ahora resulta fácil comprender por qué con esta transformación los ángulos con vértice en z_0 ($z_0 \neq 0$) quedan invariables. Si por el punto z_0 pasan dos curvas L_1 y L_2 que forman en este punto un ángulo α, esto significa que las tangentes a las curvas en este punto forman entre sí un ángulo α. Después de la transformación, el punto z_0 se convierte en el punto $z'_0 = z_0^2$ y las curvas L_1 y L_2 en las curvas L'_1 y L'_2. Las direcciones de las tangentes a las nuevas curvas, en el punto z_0, se obtienen a partir de las anteriores direcciones de las tangentes, por medio del giro en un mismo

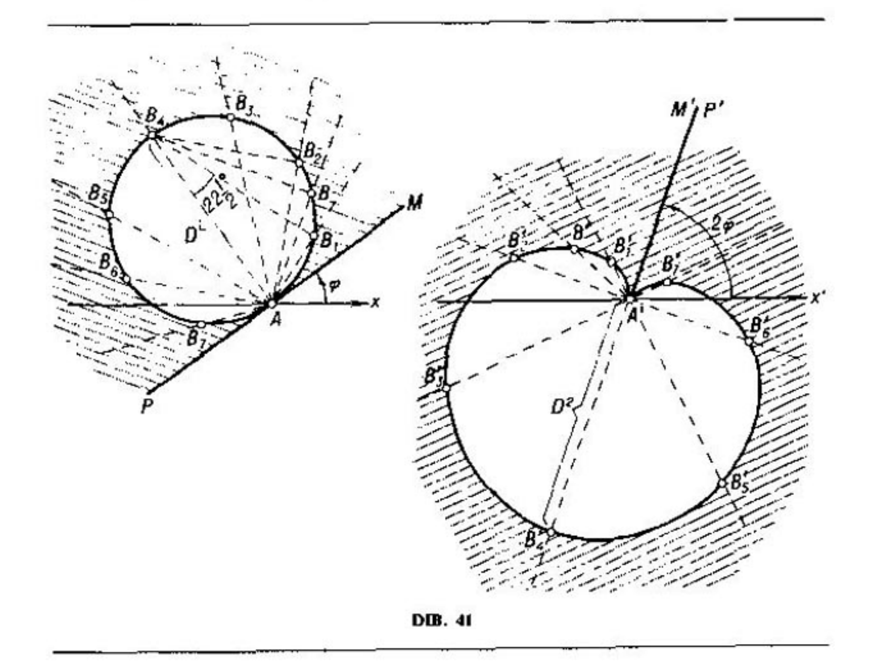
ángulo, igual a Arg z_0. Evidentemente el ángulo entre las nuevas tangentes conserva su magnitud anterior α. Y esto significa que al producir la transformación $z' = z^2$ el ángulo entre las curvas con vértice en cualquier punto $z_0 \neq 0$ no varia.

Señalemos que el método por el cual hemos demostrado la conformidad de la representación $z' = z^2$ también puede ser aplicado a otras funciones como, por ejemplo, a la fraccionaria lineal $z' = \dfrac{z-a}{z-b}$ o a la función de Zhukovski $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$. Sólo en estos casos se obtendrán otras expresiones para el ángulo de giro de la tangente. Así, para la función fraccionaria lineal se obtiene que las tangentes a las curvas que pasan por el punto z_0 giran un ángulo igual a Arg $\dfrac{a-b}{(z_0-b)^2}$ y en el caso de la función de Zhukovski, un ángulo igual a Arg $\left(1 - \dfrac{1}{z_0^2}\right)$. En el primer caso es necesario, además, suponer que $z_0 \neq b$ (la expresión $\dfrac{z-a}{z-b}$ en ese punto no tiene sentido) y en el segundo caso, que $z_0 \neq 0$ (por la misma causa) y, además, que $z_0 = \pm 1$ (en esos puntos $1 - \dfrac{1}{z_0^2}$ es igual a cero y, por consiguiente, Arg $\left(1 - \dfrac{1}{z_0^2}\right)$ pierde su sentido). Podría comprobarse que en el caso de la función de Zhukovski, en los puntos -1 y $+1$ se altera la conformidad: como resultado de la transformación los ángulos con vértice en estos puntos aumentan al doble.

33. Examinemos en qué se transforma, mediante la función $z' = z^2$ una circunferencia que pasa por el origen de coordenadas A. Sea que la tangente a la circunferencia en ese punto forma con Ax el ángulo φ (dib. 41). Es evidente que la circunferencia está situada en el semiplano limitado por esa tangente. La función $z' = z^2$ transforma el semiplano en un plano con el rayo $A'M'$ expulsado. Para hallar la representación de la circunferencia tracemos en el semiplano, a partir de A, todos los rayos posibles y en cada uno de ellos señalemos el punto de intersección con la circunferencia. Para precisar, en nuestro dibujo se dan siete rayos; todos los ángulos MAB_1, B_1AB_2, B_2AB_3, ..., B_7AP son iguales entre sí $\left(\text{e iguales a } 22\frac{1}{2}^{\circ}\right)$. La función $z' = z^2$ los transforma

en rayos que forman entre sí ángulos doblados; cada uno de los ángulos $M'A'B'_1$, $B'_1A'B'_2$, $B'_2A'B'_3$..., $B'_7A'P'$ es igual a 45°.

Calculemos adonde pasarán los puntos B_1, B_2, B_3, ..., B_7. Las distancias de sus representaciones B'_1, B'_2, B'_3, ..., B'_7 desde el punto A' serán iguales a los cuadrados de las distancias AB_1, AB_2, AB_3, ..., AB_7. Pero del dib. 41 se ve que $AB_7 = AB_1 = AB_4$ sen $22\frac{1}{2}^\circ = D$ sen $22\frac{1}{2}^\circ$ (D es el diámetro de la circunferencia);



DIB. 41

luego $AB_6 = AB_2 = D$ sen 45°, $AB_5 = AB_3 = D$ sen $67\frac{1}{2}^\circ$, $AB_4 = D$.

Queda por señalar que $\text{sen}^2\, 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} =$

$= \frac{2 - 1{,}4142...}{4} = 0{,}1464...$, $\text{sen}^2\, 45^\circ = 0{,}5000...$, $\text{sen}^2\, 67\frac{1}{2}^\circ =$

$= \cos^2 22\frac{1}{2}^\circ = 1 - \text{sen}^2\, 22\frac{1}{2}^\circ = 0{,}8535...$ Por consiguiente, $A'B'_7 =$

$= A'B'_1 = 0{,}1464D^2$, $A'B'_6 = A'B'_2 = 0{,}5000D^2$, $A'B'_5 = A'B'_3 =$ $= 0{,}8535D^2$, $A'B'_4 = D^2$. Por los puntos A', B'_1, B'_2, B'_3, ..., B'_7 pasa la curva que en el caso de la transformación $z' = z^2$, es representación de la circunferencia. Para obtener una idea más exacta acerca de ella podría haberse tomado mayor cantidad de rayos. Esta curva es denominada *cardioide* (la palabra cardioide significa en forma de corazón). Es fácil comprender que la figura sombreada en el dib. 41, izquierda (se obtiene del semiplano mediante la expulsión del círculo), se transforma por la función $z' = z^2$ en la figura sombreada y que se muestra en la parte derecha del mismo dibujo. Esta última está limitada por la cardioide y el rayo $A'M'$ que forma el ángulo 2φ con la dirección positiva del eje real. Puede demostrarse que el rayo $A'M'$ está dirigido por la tangente a cada uno de los dos arcos de la cardioide que parten del punto A. Tracemos en el dib. 41, izquierda un rayo arbitrario AB y supongamos que B designa el punto de su intersección con la circunferencia; si el ángulo $MAB = \alpha$, entonces $AB = D$ sen α. Mediante la función $z' = z^2$ este rayo se transforma en el rayo $A'B'$ (dib. 41, derecha), siendo que el punto B', la representación del punto B, cae en la cardioide. A base de las propiedades conocidas de la transformación $z' = z^2$ tenemos: $M'A'B' = 2\alpha$ y $A'B' = AB^2 = D^2$ sen$^2\,\alpha$. Consideraremos el ángulo α variable y le obligaremos a acercarse ilimitadamente a cero. Entonces, el ángulo 2α entre $A'B'$ y $A'M'$ también tenderá en forma ilimitada a cero, en tanto que el mismo rayo $A'B'$ que es la secante para la cardioide, girará en torno al punto A', acercándose ilimitadamente a la posición límite $A'M'$. Con esto, el punto B', que es el punto de intersección de la secante con la curva más cercano a A', se acercará en forma ilimitada a A', ya que la distancia $A'B' = D^2$ sen$^2\,\alpha$ tiende a cero cuando α tiende a cero. De aquí se deduce que $A'M'$, la posición límite de la secante, es tangente al arco $A'B'_1B'_2$ ... en el punto A'. También se puede cerciorarse de que $A'M'$ es tangente al arco $A'B'_7B'_6$ ... en ese mismo punto A'.

34. Ocupémonos, por último, de la función de Zhukovski

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

y apliquémosla a la transformación de la figura limitada por dos circunferencias: una que pasa por los puntos -1 y $+1$ y otra que es tangente interior a la primera en el punto 1; en el dib. 42 esta figura ha sido sombreada.

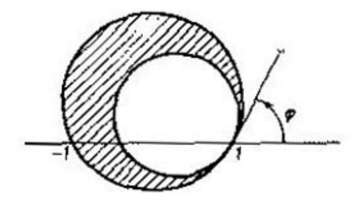
Convenzámonos, en principio, de que la transformación

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

puede reducirse a varias transformaciones más sencillas, de tipo ya conocido por nosotros, efectuadas una tras otra. Con este fin examinemos la relación

$$\frac{z' - 1}{z' + 1}.$$

Sustituyendo en ella z' por la expresión



DIB. 42

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

hallaremos que:

$$\frac{z' - 1}{z' + 1} = \frac{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1}{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + 1} = \frac{z^2 + 1 - 2z}{z^2 + 1 + 2z} = \left(\frac{z - 1}{z + 1}\right)^2.$$

Así, debido a que

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

se deduce que

$$\frac{z'-1}{z'+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2.$$

También es válido el contrario: del segundo se deduce el primero. Realmente, del segundo obtenemos:

$$z'-1=z'\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2,$$

de donde

$$z'\left[1-\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2\right]=1+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$$

y a continuación

$$z'=\frac{1+\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2}{1-\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2}=\frac{(z+1)^2+(z-1)^2}{(z+1)^2-(z-1)^2}=\frac{2z^2+2}{4z}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

Así, las relaciones

$$z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\quad\text{y}\quad\frac{z'-1}{z'+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$$

son equivalentes (una se deduce de la otra).

Por eso, la transformación de Zhukovski

$$z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

es posible presentar en la forma siguiente:

$$\frac{z'-1}{z'+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2.$$

El resultado obtenido debe ser el mismo. Pero ahora está claro que el paso de z a z' puede efectuarse en tres etapas. Al principio,

pasar de z a la variable auxiliar z_1, según la fórmula

$$z_1 = \frac{z - 1}{z + 1}, \tag{1}$$

luego pasar de z_1 a z_2 por la fórmula

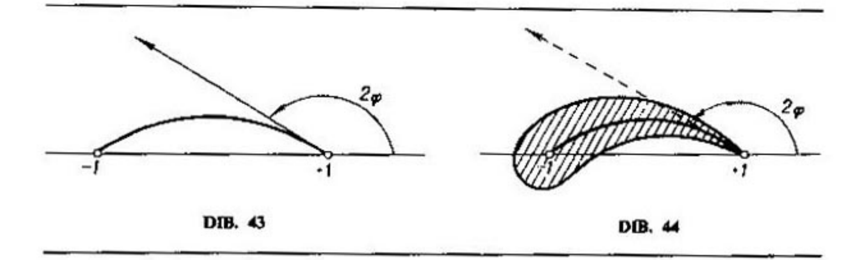
$$z_2 = z_1^2 \tag{2}$$

y finalmente pasar de z_2 a z' por la fórmula

$$\frac{z' - 1}{z' + 1} = z_2. \tag{3}$$

El lector puede cerciorarse fácilmente de que si ponemos la expresión de z_1 de la fórmula (1) en la (2) y después la expresión obtenida de z_2 se pone en la (3), se obtendrá la transformación necesaria:

$$\frac{z' - 1}{z' + 1} = \left(\frac{z - 1}{z + 1}\right)^2.$$



DIB. 43

DIB. 44

¿Qué sentido tiene la sustitución de una transformación, la de Zhukovski, por las tres transformaciones (1), (2) y (3) efectuadas una tras otra? La idea consiste en que cada una de ellas es más simple que la transformación de Zhukovski y que además ya nos es conocida.

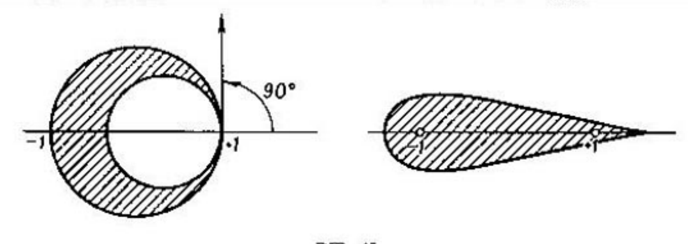
Así, aplicamos a la figura representada en el dib. 42 la transformación (1), para aplicar a la que de esto se obtiene, la transformación (2) y, finalmente, aplicar a la que se obtiene luego, aún la otra transformación (3).

Recordemos que en el punto 30 ya hemos hallado que la figura representada en el dib. 38, izquierda (y ella coincide con la figura

del dib. 42), por medio de la función

$$z'_1 = \frac{z-1}{z+1}$$

(es decir, de la función (1)) se transforma en la figura expuesta en el dib. 38, derecha. Esta última está limitada por una recta que pasa por el punto O y forma con la dirección positiva del eje real y una circunferencia tangente a esa recta en el punto C el ángulo φ. Esta figura puede caracterizarse como un semiplano del que se ha exluido el círculo. Transformemos esta figura por medio de la función $z_2 = z_1'^2$ (2). Una simple mirada al dib. 41 es suficiente para ver que esta tarea ya ha sido resuelta en el punto 33. Al final de dicho punto señalamos que aquí debe obtenerse la figura representada en el dib. 41, derecha; esta última está limitada por un rayo y la cardioide. Por consiguiente, queda por aplicar la transformación $\dfrac{z'-1}{z'+1} = z_2$ (3) a la última figura.



DIB. 45

De lo tratado en el punto 28 (con la única diferencia que aquí z_2 se considera como variable independiente y z' como función) se infiere que cuando z_2 describe el rayo $A'M'$, que parte del origen y está inclinado bajo un ángulo 2φ respecto de la parte positiva del eje real, su punto correspondiente z' describe un arco de circunferencia que une los puntos $+1$ y -1; la tangente a este arco en el punto $+1$ forma también con la dirección desde el punto -1 hacia $+1$, es decir, con la dirección positiva del eje real un ángulo 2φ (dib. 43).

Por consiguiente, hemos hallado, gracias a la transformación $\dfrac{z'-1}{z'+1} = z_2$, la representación del rayo $A'M'$. Para hallar la

representación de la cardioide podría examinar adonde pasarán sus puntos, por ejemplo, los puntos B'_1, B'_2, ..., B'_7. No realizaremos aquí cálculos voluminosos sino que nos contentaremos con exponer en el dib. 44 la curva transformada en su forma final.

La figura que ella encierra (limita) tiene la forma del perfil (es decir, del corte transversal) del ala de un avión. Este tipo de perfiles fueron propuestos por vez primera por los científicos rusos S. A. Chapliguin y N. E. Zhukovski, por lo cual se los denomina *perfiles de Zhukovski – Chapliguin*. Variando el ángulo φ de inclinación de la tangente a la circunferencia en el punto 1 (dib. 42) y el radio de la circunferencia menor pueden obtenerse diferentes perfiles. En particular, si el ángulo φ es recto, es decir, la circunferencia está trazada tomando el segmento entre -1 y $+1$ como diámetro, el perfil correspondiente es simétrico respecto del eje real (dib. 45). Este perfil suele denominarse *timón de Zhukovski*.

Los perfiles de Zhukovski – Chapliguin son los perfiles básicos en todas las investigaciones que tratan de la teoría del ala de los aviones.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Demostrar que si dos números complejos $c_1 = a_1 + ib_1$ y $c_2 = a_2 + ib_2$ son iguales, entonces, sus partes reales e imaginarias por separado también son iguales: $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

Indicación. Partir del hecho que los números complejos iguales se representan mediante vectores de igual longitud, paralelos y orientados en un mismo sentido.

2. Empleando las leyes conmutativa, asociativa y distributiva efectuar las siguientes operaciones con números complejos:

a) $(3 - 7i) + (-2 + i) + (-1 + 5i)$;

b) $(3 - 7i)(3 + 7i)$; c) $(1 + i)(1 + i\sqrt{3})$;

d) $(1 + i)^2 : (1 - i)^2$; e) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$.

Respuestas: a) $-i$; b) 58; c) $1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$; d) -1; e) -1.

3. Demostrar que todo número complejo $c = a + bi \neq 0$, cuya magnitud absoluta es igual a r y su argumento es igual a α puede representarse en la forma

$$c = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

(forma trigonométrica del número complejo).

Indicación. Expresar a y b mediante r y α con ayuda de un dibujo en el cual $c = a + bi$ esté representado como vector.

4. Demostrar que si

$$c_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i \operatorname{sen}\alpha_1) \quad \text{y} \quad c_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i \operatorname{sen}\alpha_2),$$

entonces,

$$c_1c_2 = r_1r_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)].$$

Indicación. Emplear la formulación geométrica de la regla de la multiplicación de los números complejos o multiplicar c_1 por c_2 empleando las leyes de la suma y la multiplicación y luego aplicar la fórmula de la suma para el coseno y el seno.

5. Basándose en el resultado del problema anterior demostrar que si

$$c = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

(r es la magnitud absoluta de c y α el argumento de c), entonces

$$c^n = r^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha)$$

(n es un numero natural). Deducir de aquí que

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = \cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha$$

(fórmula de Moivre).

6. Empleando la fórmula de Moivre (véase el problema 5), calcular:

$$\text{a)}\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{100}; \quad \text{b)}\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{217}.$$

Indicación. $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45° + i \operatorname{sen} 45°$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2} =$
$= \cos 30° + i \operatorname{sen} 30°$.

Respuestas: a) -1; b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$.

7. Partiendo de la fórmula de Moivre (véase el problema 5), deducir las fórmulas para el $\cos n\alpha$ y $\operatorname{sen} n\alpha$ para $n = 2$, 3 y 4.

Indicación. En la fórmula de Moivre $(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = \cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha$, hay que elevar $\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$ a la n-ésima potencia mediante multiplicación directa (por ejemplo, $(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^2 = \cos^2 \alpha + 2i \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$) y luego en la fórmula de Moivre escribir que las partes reales e imaginarias del primer y segundo miembros de la igualdad son iguales entre sí.

Respuestas: $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$; $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$; $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha$; $\operatorname{sen} 3\alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha$; $\cos 4\alpha = \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^4 \alpha$; $\operatorname{sen} 4\alpha = 4 \operatorname{sen} \alpha \cos^3 \alpha - 4 \operatorname{sen}^3 \alpha \cos \alpha$.

8. En qué se transforma el triángulo con vértices en los puntos 0, $1 - i$, $1 + i$ como resultado de la transformación:

$$z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z.$$

¿Cuál es el sentido geométrico de esta transformación?

Indicación. Comenzar con la aclaración del sentido geométrico. También es posible empezar con el cálculo de los vértices del triángulo transformado.

9. ¿En qué se transforma el semicírculo ubicado sobre el eje real y cuyo diámetro es el segmento con extremos -1 y $+1$, como resultado de la transformación: $z' = \frac{z-1}{z+1}$?

Respuesta: En el ángulo recto limitado por la parte superior del eje imaginario y por la parte negativa del eje real.

10. ¿En qué se transformará el ángulo α con vértice en el origen de coordenadas, como resultado de la transformación $z' = z^3$?

Respuesta: En el ángulo de abertura 3α con vértice en el origen de coordenadas.

FUNCIONES MARAVILLOSAS

Traducio del ruso por
Carlos Vega, Candidato a Doctor
en ciencias físico-matemáticas,
Catedrático de Matemáticas Superiores

«El camino más corto
entre dos verdades del campo real
pasa con frecuencia
por el campo complejo».

J. Hadamard

PREFACIO

Las funciones trigonométricas destacan por su definición geométrica entre las funciones que se estudian en la Matemática elemental. Sin detenerse en variantes insubstanciales de una misma idea, se puede decir que el seno y el coseno se introducen como coordenadas del punto de la circunferencia unidad; la variable independiente se interpreta como ángulo o arco de la circunferencia.

En este libro se explicará cómo, partiendo de otras curvas —la hipérbola equilátera y la lemniscata de Bernoulli (curva que tiene la forma de un ocho)—, se pueden introducir funciones importantes e interesantes, afines a las trigonométricas, que de un lado se asemejan a éstas y de otro lado poseen nuevas propiedades maravillosas. Estas funciones se denominan hiperbólicas y lemniscáticas, respectivamente. Siguiendo la analogía, denominaremos aquí circulares las funciones trigonométricas.

Consideramos todas estas funciones en tanto que casos particulares del *seno generalizado* que es la función inversa de la integral de tipo

$$x = \int_0^y \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}.$$

El seno circular corresponde al caso $m = -1$ y $n = 0$; el seno hiperbólico, al caso $m = 1$ y $n = 0$, y el seno lemniscático, al caso $m = 0$ y $n = -1$. Si $m = -1 - k^2$ y $n = k^2$ $(0 < k < 1)$, la función inversa de la integral es el seno de Jacobi; al estudio de esta función conduce el problema del péndulo matemático.

Para estudiar las propiedades de todas estas funciones de un modo uniforme, es necesario, ante todo, definirlas en tanto que funciones de variable compleja y demostrar a continuación el teorema de adición. Seguimos de esta forma el camino que a finales del siglo XVIII el joven Gauss trazó en su diario matemático.

El lector debe estar familiarizado con los elementos de la geometría analítica y del cálculo diferencial e integral que corresponden aproximadamente al curso que se dicta en las Escuelas Técnicas Superiores. Todos los elementos necesarios referentes a la integración en el plano complejo, son explicados por nosotros, aunque omitiendo las demostraciones.

El objetivo final que persigue el libro es familiarizar al lector que no domina la teoría de funciones de variable compleja, con los representantes más elementales de la clase de funciones elípticas (las funciones lemniscáticas) así como con funciones más generales (las funciones elípticas de Jacobi).

Para concluir, advertimos al lector que este libro no tiene carácter de pasatiempo: debe ser leído teniendo el lápiz en la mano.

El autor.

CAPÍTULO I

DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE LAS FUNCIONES CIRCULARES, HIPERBÓLICAS Y LEMNISCÁTICAS

1. En el curso escolar de matemática se estudia la definición y las propiedades de las funciones circulares. Expondremos aquí sucintamente hechos conocidos en la forma que nos conviene para resaltar claramente la semejanza y la diferencia.

Partiremos de la circunferencia unidad:

$$x^2 + y^2 = 1. \qquad (1)$$

La longitud de un arco t que va del punto C a un punto A (fig. 1) se determina con una exactitud de $2\pi k$, o sea, de un múltiplo entero de la longitud completa de la circunferencia; aquí k es el número de vueltas enteras alrededor del origen de coordenadas que describe el punto móvil A antes de llegar de C a A; se considera positivo el sentido de recorrido opuesto al movimiento de la aguja de un reloj.

Las coordenadas x e y del punto A no dependen del número de vueltas enteras y, por consiguiente, son funciones periódicas de t de período 2π. Por definición, ponemos

$$x = \cos t \quad \text{e} \quad y = \operatorname{sen} t. \qquad (2)$$

De aquí se deduce que para todo t

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1. \qquad (3)$$

De la simetría de la circunferencia respecto al eje Ox se desprende que

$$\cos(-t) = \cos t \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t. \qquad (4)$$

Si se emplea también la simetría respecto a la bisectriz del primero y tercero cuadrantes por cuyo efecto t se transforma en $\frac{\pi}{2} - t$, x se transforma en y e y, en x, encontraremos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t. \qquad (5)$$

Cada una de las fórmulas (5) permite reducir la definición de una función circular a otra, por ejemplo, definir $\cos t$ partiendo del $\operatorname{sen} t$ definido anteriormente.

De las fórmulas (4) y (5) se pueden deducir, como corolarios, todas las demás fórmulas de «reducción». Así, por ejemplo, se

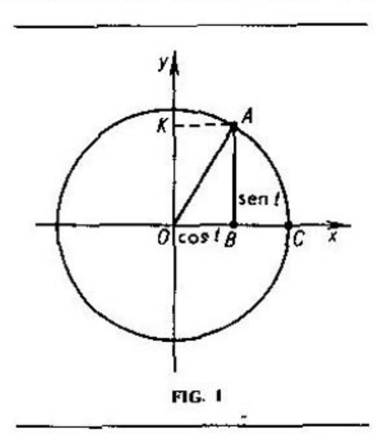


FIG. 1

obtienen cuatro pares de fórmulas, empleándose para la demostración de cada par siguiente las fórmulas anteriores:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(-t)\right]=\operatorname{sen}(-t)=-\operatorname{sen} t,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}-(-t)\right]=\cos(-t)=\cos t;$$

$$\cos(\pi-t)=\cos\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]=-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=-\cos t,$$

$$\operatorname{sen}(\pi-t)=\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\operatorname{sen} t;$$

$$\cos(\pi+t)=\cos[\pi-(-t)]=-\cos(-t)=-\cos t,$$

$$\operatorname{sen}(\pi+t)=\operatorname{sen}[\pi-(-t)]=\operatorname{sen}(-t)=-\operatorname{sen} t;$$

$$\cos(2\pi+t)=\cos[\pi+(\pi+t)]=-\cos(\pi+t)=\cos t,$$

$$\operatorname{sen}(2\pi+t)=\operatorname{sen}[\pi+(\pi+t)]=-\operatorname{sen}(\pi+t)=\operatorname{sen} t.$$

Notemos que el segundo par de fórmulas se puede deducir inmediatamente de la simetría de la circunferencia respecto al eje Oy;

el tercer par, de la simetría respecto al origen de coordenadas. En cuanto al último par de fórmulas, expresan la periodicidad de las funciones circulares de la que hemos hablado más arriba.

La definición (2) y la ecuación (1) permiten dar una respuesta a la pregunta sobre el número y el carácter de las soluciones de ecuaciones de tipo:

$$\operatorname{sen} t = \alpha \quad \text{o} \quad \cos t = \alpha,$$

donde α es un número real.

Consideremos, por ejemplo, la ecuación:

$$\operatorname{sen} t = \alpha. \tag{6}$$

Se puede afirmar que no tiene solución ninguna para $|\alpha| > 1$. Para $|\alpha| \leqslant 1$ en el semiintervalo $0 \leqslant t < 2\pi$ existe una solución por lo menos. A saber:

si $\alpha = 1$, una solución $t = \dfrac{\pi}{2}$;

si $0 < \alpha < 1$, dos soluciones t_1 y t_2, siendo $0 < t_1 < \dfrac{\pi}{2}$

$$\text{y } \frac{\pi}{2} < t_2 = \pi - t_1 < \pi;$$

si $\alpha = 0$, dos soluciones $t_1 = 0$ y $t_2 = \pi$;

si $-1 < \alpha < 0$, dos soluciones t_1 y t_2, siendo $\pi < t_1 < \dfrac{3\pi}{2}$

$$\text{y } \frac{3\pi}{2} < t_2 = 3\pi - t_1 < 2\pi;$$

si $\alpha = -1$, una solución $t = \dfrac{3\pi}{2}$.

Es evidente que en cada uno de los casos $\alpha = 1$ o $\alpha = -1$ se puede hablar de dos soluciones que se confunden en un punto. Si $t_1 \neq t_2$, los valores correspondientes del coseno son opuestos:

$$\cos t_1 = -\cos t_2.$$

La solución de la ecuación (6) se reduce geométricamente a la determinación de los puntos de la circunferencia (1) que tienen la ordenada dada $y = \alpha$ y al cálculo de la longitud de los arcos que terminan en los puntos determinados (fig. 2).

Todo lo expuesto en este punto queda bien reflejado en las gráficas de sen t y de cos t; para construirlas es suficiente basarse en las definiciones aceptadas (fig. 3).

Notemos que el parámetro t en la definición (2) puede ser interpretado geométricamente no sólo como la longitud del arco CA,

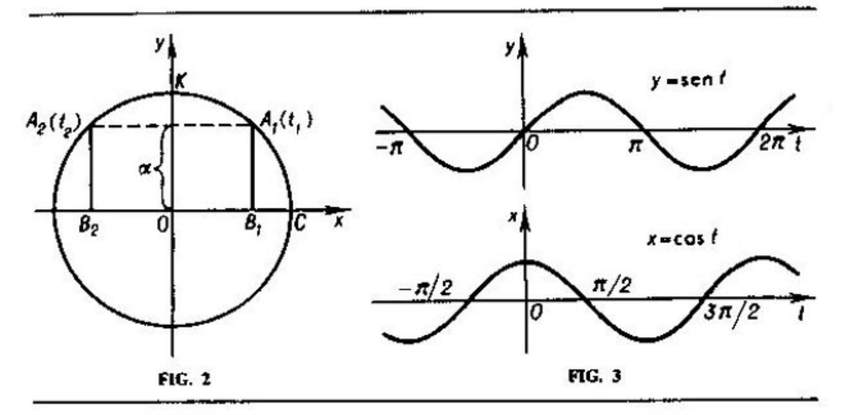


FIG. 2 FIG. 3

sino también como el área duplicada del sector OCA:

$$t = 2 \text{ áreas } OCA. \tag{7}$$

El sector debe ser considerado aquí como la figura que describe el radio móvil al desplazarse de la posición OC a la posición OA. Si el radio realiza k vueltas enteras (k puede tener uno u otro signo según el sentido de rotación), el área que describe es igual a $k\pi$; por consiguiente, la definición de t por la fórmula (7) comprende el sumando $2k\pi$.

2. Tomemos ahora, en vez de la circunferencia unidad, la hipérbola equilátera unidad

$$x^2 - y^2 = 1. \tag{8}$$

Entre las ecuaciones (1) y (8) existe una semejanza mucho mayor que entre las curvas que les corresponden (fig. 1 y fig. 4). Quizá sea poco decir esto: las ecuaciones (1) y (8) difieren sólo en el signo de y^2, mientras que las curvas de las figuras 1 y 4 no se parecen en nada. Sin embargo, más vale dar crédito a las ecuaciones que a sus ojos. La semejanza entre ecuaciones trae consigo una semejanza muy profunda entre las curvas lo que se observa claramente al comparar las funciones circulares e hiperbólicas.

Designemos por t el área duplicada del sector OCA:

$$t = 2 \text{ áreas } OCA;$$

consideraremos el área OCA positiva si el giro desde OC hacia OA se realiza en el sentido positivo, y negativa en el caso contrario. Si el punto A describe la rama de la derecha de la hipérbola representada en la fig. 4 e y aumenta desde $-\infty$ hasta $+\infty$, entonces también t aumenta de $-\infty$ a $+\infty$, respectivamente. Las

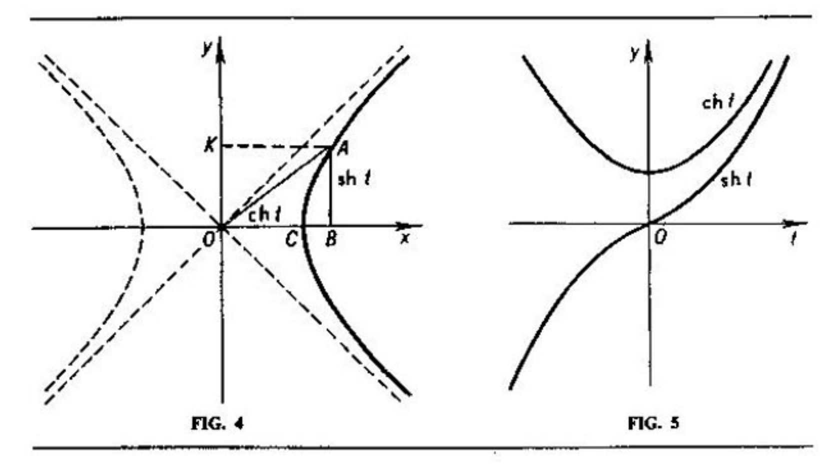


FIG. 4 FIG. 5

coordenadas x e y del punto A pueden ser consideradas como funciones unívocas de t. Por definición, ponemos

$$x = \operatorname{ch} t \quad \text{e} \quad y = \operatorname{sh} t. \tag{9}$$

Aquí ch y sh son las letras iniciales de las denominaciones latinas «cosinus hyperbolicus» (coseno hiperbólico) y «sinus hyperbolicus» (seno hiperbólico), respectivamente.

De la definición se deduce que para todo t

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1. \tag{10}$$

Empleando la simetría de la hipérbola respecto al eje Ox, llegamos a la conclusión de que

$$\operatorname{ch}(-t) = \operatorname{ch} t \quad \text{y} \quad \operatorname{sh}(-t) = -\operatorname{sh} t \tag{11}$$

(véanse las gráficas de $\operatorname{ch} t$ y $\operatorname{sh} t$ en la fig. 5).

La ecuación

$$\operatorname{sh} t = \alpha \tag{12}$$

tiene una raíz, y sólo una, para cualquier valor real de α; la ecuación

$$\operatorname{ch} t = \alpha \tag{13}$$

no tiene ninguna raíz, si $\alpha < 1$; tiene una raíz $t = 0$, si $\alpha = 1$; tiene dos raíces t_1 y $t_2 = -t_1$, si $\alpha > 1$.

Geométricamente, la solución de las ecuaciones (12) y (13) se puede reducir a la determinación de los puntos de la rama de la derecha de la hipérbola (10) que tienen la ordenada y y la abscisa $x \geqslant 1$ dadas y al cálculo de las áreas de los sectores correspondientes a los puntos determinados (fig. 6).

3. Observemos, antes de definir las funciones lemniscáticas, que existe una interpretación geométrica de las funciones circulares distinta de la expuesta en el punto 1. Consideremos la circunferencia de diámetro 1 tangente al eje Ox en el punto O: $x^2 + y^2 - y = 0$ (fig. 7). Es evidente que la cuerda OA, correspondiente al arco

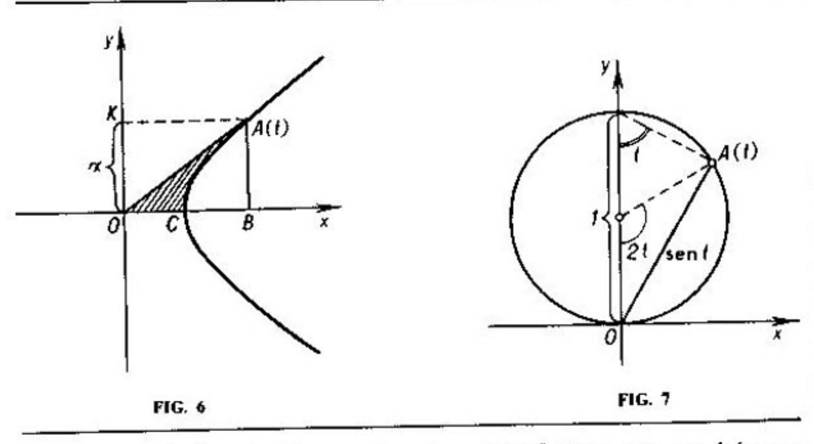


FIG. 6

FIG. 7

homónimo de longitud t, es igual a $\operatorname{sen} t$. Por eso, podríamos edificar la teoría de las funciones circulares, poniendo, por definición

$$\operatorname{sen} t = OA \quad \text{y} \quad t = \text{longitud } \overset{\frown}{OA}. \tag{14}$$

De esta definición se deduce que $\operatorname{sen} t$ aumenta de 0 a 1, cuando t aumenta desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$; si t continúa aumentando, el seno decrece y se hace cero para $t = \pi$ (π es en las condiciones dadas la longitud de la circunferencia).

Completemos nuestra definición aceptando que $\operatorname{sen} t$ cambia de signo cada vez que, al crecer t, pasa por el valor nulo. Entonces, en la fórmula (14) la longitud de OA debe tomarse con el signo «$-$», si $\pi < t < 2\pi$; con el signo «$+$», si $2\pi < t < 3\pi$, etc. Sólo con esta condición suplementaria la definición nueva coincidirá con la antigua y, en particular, obtendremos que el período de $\operatorname{sen} t$ es 2π (y no π como sucedería si se aceptase que la longitud de la cuerda OA es positiva para todos los valores posibles del arco OA que difieran en múltiples enteros de π).

La segunda función circular, el coseno, se define a través del seno mediante la igualdad

$$\cos t = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right). \tag{15}$$

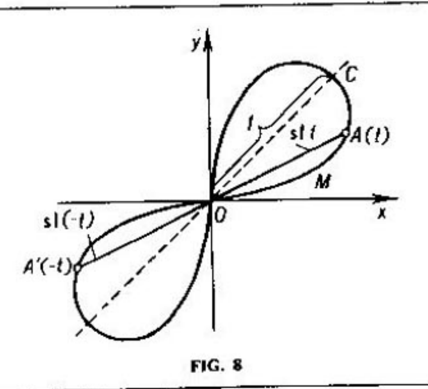


FIG. 8

4. Consideremos la lemniscata de Bernoulli representada en la fig. 8. Es la curva formada por todos los puntos del plano para los cuales es una constante el producto de sus distancias a dos puntos dados llamados focos de la lemniscata. En el caso dado, los focos se han escogido en los puntos $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ y la constante es igual a $\frac{1}{2}$. Por eso, la ecuación de la lemniscata tiene la forma:

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

o, después de elevar al cuadrado ambos miembros y simplificar,

$$(x^2 + y^2)^2 - 2xy = 0. \tag{16}$$

De esta forma, la lemniscata de Bernoulli es una curva algebraica de cuarto grado.

Introduzcamos las coordenadas polares r y φ tomando Ox por eje polar; entonces

$$x = r\cos\varphi \quad \text{e} \quad y = r\,\text{sen}\,\varphi.$$

Por consiguiente, la ecuación de la lemniscata en las coordenadas polares tiene la forma

$$r^2 = \text{sen}\,2\varphi. \tag{17}$$

Para $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ obtenemos el valor máximo $r = 1$.

De la ecuación (17) (o (16)) se deduce que la lemniscata es simétrica respecto al origen de coordenadas; además, es simétrica respecto a ambas bisectrices de los cuadrantes. En efecto, si $x = a$ e $y = b$ satisfacen la ecuación (16), entonces las coordenadas de los puntos $(-a, -b)$, (b, a) y $(-b, -a)$ también la satisfacen.

5. Supongamos que el punto móvil M arranca del origen y describe la parte de la lemniscata comprendida en el primer cuadrante, desplazándose en el sentido positivo, o sea, opuesto al movimiento de la aguja de un reloj. Puesto que al regresar por primera vez al origen se desplaza por un arco tangente a Oy, es natural exigir que, al continuar su movimiento a lo largo de la lemniscata (en el tercer cuadrante), pase al arco tangente a este mismo eje. Entonces, el sentido de recorrido de la parte de la lemniscata comprendida en el tercer cuadrante habrá que considerarlo positivo si coincide con el movimiento de la aguja de un reloj; así lo haremos. Cuando el punto concluye el primer recorrido completo de la lemniscata e inicia uno nuevo, pasa del tercer cuadrante al primero a lo largo del arco tangente a Ox, etc.

Designemos por 2ω la longitud de toda la lemniscata, de modo que la longitud del arco OMC es igual a $\dfrac{\omega}{2}$. Lo mismo que en el caso de la circunferencia, aceptaremos que el punto variable M pasa del origen O del arco a su extremo A después de un número de recorridos completos a lo largo de toda la lemniscata en uno u otro sentido. En conformidad con esto, la longitud t de cualquier arco OA se determina sólo con una exactitud de un

múltiplo entero de 2ω; por ello, r —la longitud de la cuerda OA— será una función periódica de t de período 2ω.

Completaremos la definición de esta función aceptando que cambia de signo cada vez que pasa por el valor nulo cuando t aumenta continuamente.

Denominaremos la función, definida de esta forma para todos los valores reales de t, *seno lemniscático* (por analogía con el seno circular) y la designaremos así:

$$OA = r = \mathrm{sl}\, t. \tag{18}$$

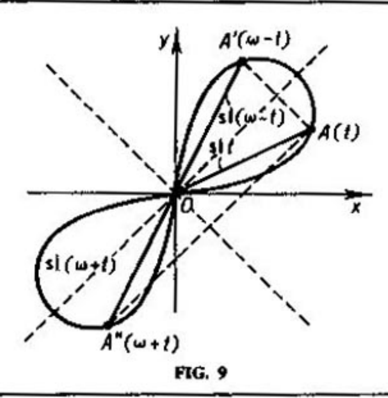


FIG. 9

Aquí sl son las letras iniciales de la denominación latina «sinus lemniscaticus». Observemos, en particular, que

$$\mathrm{sl}\,\frac{\omega}{2} = 1. \tag{18'}$$

De la simetría de la lemniscata respecto al punto O y de lo convenido en cuanto a los signos, se deduce que $\mathrm{sl}\, t$ es una función impar (fig. 8):

$$\mathrm{sl}\,(-t) = -\mathrm{sl}\, t. \tag{19}$$

La simetría respecto a la bisectriz del primer (y tercer) cuadrante da (fig. 9):

$$\mathrm{sl}\,(\omega - t) = \mathrm{sl}\, t. \tag{20}$$

Análogamente, la simetría respecto a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes conduce a la relación (fig. 9):

$$\mathrm{sl}\,(\omega + t) = -\mathrm{sl}\, t. \tag{21}$$

Es verdad que (21) es un simple corolario de (19) y (20); en efecto:

$$\mathrm{sl}\,(\omega + t) = \mathrm{sl}\,[\omega - (-t)] = \mathrm{sl}\,(-t) = -\mathrm{sl}\,t.$$

El coseno lemniscático se define a través del seno mediante la fórmula

$$\mathrm{cl}\,t = \mathrm{sl}\left[\frac{\omega}{2} - t\right]. \qquad (22)$$

De aquí se deduce, en particular, que él también es una función periódica de período 2ω. Pero a diferencia del $\mathrm{sl}\,t$, la función $\mathrm{cl}\,t$ es par. En efecto, empleando sucesivamente (22), (21), (19) y otra vez (22), encontramos

$$\mathrm{cl}\,(-t) = \mathrm{sl}\left(\frac{\omega}{2} + t\right) = -\mathrm{sl}\left(-\frac{\omega}{2} + t\right) = \mathrm{sl}\left(\frac{\omega}{2} - t\right) = \mathrm{cl}\,t. \qquad (23)$$

El lector comprobará fácilmente la validez de las igualdades:

$$\mathrm{cl}\,(\omega - t) = -\mathrm{cl}\,t \quad \text{y} \quad \mathrm{cl}\,(\omega + t) = -\mathrm{cl}\,t. \qquad (24)$$

La definición de las funciones lemniscáticas y la ecuación (16) permiten estimar el número y el carácter de las soluciones de las ecuaciones de tipo $\mathrm{sl}\,t = \alpha$ o $\mathrm{cl}\,t = \alpha$, donde α es un número real.

Aquí tiene lugar una analogía completa con el caso de las funciones circulares (punto 1).

Consideremos, por ejemplo, la ecuación

$$\mathrm{sl}\,t = \alpha. \qquad (25)$$

Se puede afirmar que no tiene ninguna solución para $|\alpha| > 1$. Para $|\alpha| \leqslant 1$ en el semiintervalo $0 \leqslant t < 2\omega$ existe una solución por lo menos. A saber:

si $\alpha = 1$, una solución $t = \dfrac{\omega}{2}$;

si $0 < \alpha < 1$, dos soluciones t_1 y t_2, siendo $0 < t_1 < \dfrac{\omega}{2}$ y $\dfrac{\omega}{2} < t_2 = \omega - t_1 < \omega$;

si $\alpha = 0$, dos soluciones $t_1 = 0$ y $t_2 = \omega$;

si $-1 < \alpha < 0$, dos soluciones t_1 y t_2, siendo $\omega < t_1 < \frac{3\omega}{2}$

$$y \frac{3\omega}{2} < t_2 = 3\omega - t_1 < 2\omega;$$

si $\alpha = -1$, una solución $t = \frac{3\omega}{2}$.

Es evidente que en cada de los casos $\alpha = 1$ o $\alpha = -1$ se puede hablar de dos soluciones que se confunden en un punto.

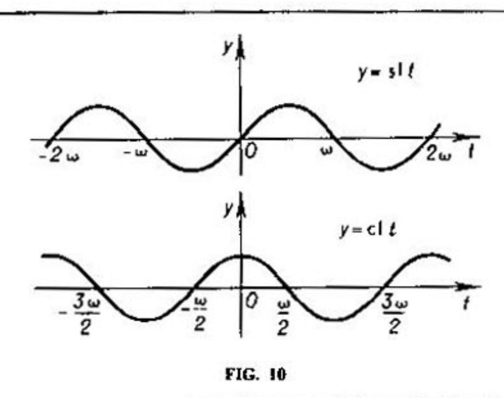


FIG. 10

Observemos, además, que si $t_1 \neq t_2$, los valores correspondientes de $\mathrm{cl}\, t$ son opuestos:

$$\mathrm{cl}\, t_1 = -\mathrm{cl}\, t_2.$$

Geométricamente, la solución de la ecuación (25) se reduce a la determinación de los puntos de intersección de la lemniscata (16) y la circunferencia $x^2 + y^2 = \alpha^2$, a la selección de aquellos de estos puntos para los cuales $r = OA$ tiene el mismo signo que α y, finalmente, al cálculo de las longitudes de los arcos correspondientes.

Todo lo expuesto en este punto queda reflejado en las gráficas de $\mathrm{sl}\, t$ y de $\mathrm{cl}\, t$ que recuerdan por su forma la sinusoide y la cosinusoide (fig. 10).

CAPÍTULO II

SENO GENERALIZADO

6. Aquí estableceremos la posibilidad de un enfoque uniforme del estudio de los senos (y de los cosenos también) definidos geométricamente en el primer capítulo. Con este fin *consideraremos todo seno en tanto que una función inversa de una integral.*

Comencemos por el seno circular. Al final del punto 1 se señaló que la variable t puede ser interpretada como el área duplicada del sector circular OAC (fig. 1). Si x e y son las coordenadas del punto A ($y = \operatorname{sen} t$), entonces $x = \sqrt{1 - y^2}$ y, por consiguiente,

$$\text{área } \Delta\, OAK = \frac{1}{2}\, y \sqrt{1 - y^2}.$$

El área del trapezoide $OCAK$ se calcula mediante la fórmula:

$$\text{área } OCAK = \int_0^y \xi\, d\eta = \int_0^y \sqrt{1 - \eta^2}\, d\eta.$$

Integrando por partes, encontramos:

$$\int_0^y \sqrt{1 - \eta^2}\, d\eta = \sqrt{1 - y^2}\, y + \int_0^y \frac{\eta^2\, d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} =$$

$$= \sqrt{1 - y^2}\, y - \int_0^y \sqrt{1 - \eta^2}\, d\eta + \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}},$$

de donde

$$\int_0^y \sqrt{1 - \eta^2}\, d\eta = \frac{1}{2} \sqrt{1 - y^2}\, y + \frac{1}{2} \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}.$$

Por consiguiente,

$$S = \text{área } OCA = \text{área } OCAK - \text{área } \Delta\, OAK = \frac{1}{2}\int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}$$

o

$$t = 2S = \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}. \tag{26}$$

Si y aumenta de -1 a 1, entonces t aumenta de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$; para calcular $\frac{\pi}{2}$ obtenemos la fórmula:

$$\int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}5708. \tag{27}$$

Recíprocamente, si t aumenta de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$, entonces $y = \operatorname{sen} t$ aumenta de -1 a 1. De esta forma, la función $y = \operatorname{sen} t$ puede ser considerada en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ como la función inversa de la integral (26). La función $\cos t$ la definiremos igual que antes

$$\cos t = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right).$$

7. Consideremos ahora el seno hiperbólico $\operatorname{sh} t$; al definirlo geométricamente (punto 2), la variable t ha sido interpretada como el área duplicada del sector OCA (fig. 4). Tenemos

$$S = \text{área } OCA = \text{área } OCAK - \text{área } OAK.$$

Empleando la ecuación $x^2 - y^2 = 1$ de la hipérbola, encontramos:

$$\text{área } OAK = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}\sqrt{1+y^2}\, y$$

y

$$\text{área } OCAK = \int_0^y \xi\, d\eta = \int_0^y \sqrt{1+\eta^2}\, d\eta.$$

La integración por partes da:

$$\int_0^y \sqrt{1+\eta^2}\,d\eta = \sqrt{1+y^2}\,y - \int_0^y \frac{\eta^2}{\sqrt{1+\eta^2}}\,d\eta =$$

$$= \sqrt{1+y^2}\,y - \int_0^y \sqrt{1+\eta^2}\,d\eta + \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^2}},$$

de donde

$$\text{área } OCAK = \int_0^y \sqrt{1+\eta^2}\,d\eta = \frac{1}{2}\sqrt{1+y^2}\,y + \frac{1}{2}\int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}.$$

Por consiguiente,

$$S = \frac{1}{2}\int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}$$

o

$$t = 2S = \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}. \tag{28}$$

Si y aumenta de $-\infty$ a $+\infty$, entonces t también aumenta de $-\infty$ a $+\infty$ ya que

$$\int_0^\infty \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} = \infty.$$

Recíprocamente, si t aumenta de $-\infty$ a $+\infty$, entonces también y aumenta de $-\infty$ a $+\infty$. De esta forma, la función $y = \operatorname{sh} t$ se puede considerar en todo el eje numérico $(-\infty, +\infty)$ como función inversa de la integral (28).

8. En lo que sigue adoptaremos un sistema de exposición en el que las integrales (26) y (28) serán primarias mientras que las

funciones $\operatorname{sen} t$ y $\operatorname{sh} t$ serán secundarias: las definiremos como funciones inversas respecto a las integrales. Es verdad que después de aceptar estas definiciones, las propias integrales se pueden considerar en tanto que funciones inversas de $\operatorname{sen} t$ y $\operatorname{sh} t$, respectivamente, e introducir para ellas las designaciones

$$t = \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \operatorname{arcsen} y \quad \text{y} \quad t = \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} = \operatorname{arsh} y. \qquad (29)$$

En el primer caso, las letras «arc» son las letras iniciales de la palabra «arcus» (arco). Efectivamente, en el círculo unidad un mismo número es la medida del área duplicada del sector OAC y del arco AC. En el segundo caso, las letras «ar» son las letras iniciales de la palabra «área». Para la hipérbola no existe una relación tan sencilla entre el área del sector OAC y el arco AC como en el caso del círculo.

Claro está que las fórmulas (29) no ofrecen por ahora nuevos medios para calcular las integrales respectivas. Por ejemplo, la primera de ellas afirma sencillamente que la integral es una función inversa de $\operatorname{sen} t$; pero, $\operatorname{sen} t$ lo queremos definir precisamente como función ¡inversa de la integral!

Sin embargo, para la segunda de las integrales (29) se puede dar una expresión analítica independiente de nuestras definiciones. A saber, esta integral se expresa mediante la siguiente fórmula cuya validez se establece por diferenciación:

$$t = \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right). \qquad (30)$$

Ello permite obtener para la función inversa $y = \operatorname{sh} t$ una fórmula que nos libera de la necesidad de recurrir a la integral (28) cada vez que se trate del seno hiperbólico. En efecto, de (30) se deduce:

$$\sqrt{1+y^2} + y = e^t,$$

de donde

$$\sqrt{1+y^2} - y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}+y} = e^{-t}.$$

Restando término por término la segunda igualdad de la primera, obtenemos:

$$y = \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \tag{31}$$

Luego, el seno hiperbólico se podía haber definido desde el principio mediante la fórmula (31) como la semidiferencia de dos funciones exponenciales.

Entonces, la fórmula (10) da para $\operatorname{ch} t$:

$$\operatorname{ch}^2 t = 1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2,$$

y puesto que $\dfrac{e^t + e^{-t}}{2} > 0$ y $\operatorname{ch} t$ es también positivo (recordemos que $x = \operatorname{ch} t$ es la abscisa del punto de la rama de la derecha de la hipérbola (fig. 4)), resulta

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}. \tag{32}$$

Esta fórmula define el coseno hiperbólico como la semisuma de las funciones exponenciales e^t y e^{-t}. En el capítulo 5 veremos que las funciones circulares también se expresan a través de las funciones exponenciales pero con exponentes imaginarios.

9. Pasemos al seno lemniscático $\operatorname{sl} t$ donde la variable t se considera como la longitud del arco de la lemniscata. Para expresar t en forma de una integral emplearemos las coordenadas polares. La diferencial de la longitud de arco en las coordenadas polares tiene la forma siguiente (fig. 11):

$$dt = \sqrt{(r\,d\varphi)^2 + dr^2} = \sqrt{r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 1}\,dr.$$

En el caso considerado, la ecuación (17) da:

$$\varphi = \frac{1}{2}\ \operatorname{arcsen}\ (r^2),$$

y de (29) obtenemos (para $y = r^2$):

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{r}{\sqrt{1 - r^4}};$$

por consiguiente,

$$dt = \sqrt{\frac{r^4}{1 - r^4} + 1}\, dr = \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}},$$

de donde

$$t = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}}. \tag{33}$$

Si r aumenta de -1 a $+1$, la integral (33) crece de $-\frac{\omega}{2}$ a $\frac{\omega}{2}$,

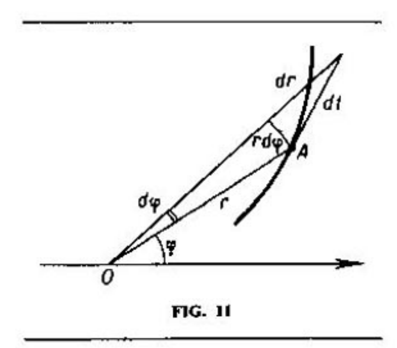


FIG. 11

donde $\frac{\omega}{2}$ tiene el valor:

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}} \approx 1{,}3111. \tag{34}$$

Recíprocamente, si t aumenta de $-\frac{\omega}{2}$ a $\frac{\omega}{2}$, entonces r crece de -1 a 1. De esta forma, la función $y = \operatorname{sl} t$ se puede definir en el intervalo $\left(-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}\right)$ como la función inversa de la integral (33). La función $\operatorname{cl} t$ la definiremos igual que antes mediante la fórmula:

$$\operatorname{cl} t = \operatorname{sl}\left(\frac{\omega}{2} - t\right).$$

10. Comparemos las definiciones de los tres senos propuestas en este capítulo: $y = \operatorname{sen} t$ (el seno circular) es la función inversa de $\int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}$ y definida en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, donde $\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}$; $y = \operatorname{sh} t$ (el seno hiperbólico) es la función inversa de $\int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}$ y definida en todo el eje numérico; $y = \operatorname{sl} t$ (el seno lemniscático) es la función inversa de $\int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^4}}$ y definida en el intervalo $\left(-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}\right)$, donde $\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^4}}$.

Es evidente que quedarán abarcados todos estos casos si se logra estudiar la función $y = s(t)$ inversa respecto a la integral de tipo

$$t = \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1 + m\eta^2 + n\eta^4}}, \qquad (35)$$

donde m y n son unos números reales. Denominaremos esta función *seno generalizado.*

Para $m = -1$ y $n = 0$ obtenemos el seno circular; para $m = 1$ y $n = 0$, el seno hiperbólico, y para $m = 0$ y $n = -1$, el seno lemniscático.

Si $m = -(1 + k^2)$ y $n = k^2$, donde $0 < k < 1$, el polinomio $1 + m\eta^2 + n\eta^4$ tiene la forma $(1 - \eta^2)(1 - k^2\eta^2)$. En este caso la función $s(t)$ da la función elíptica de Jacobi de *módulo* k que se denomina *seno de amplitud* y se designa así: $\operatorname{sn}(t, k)$ o brevemente $\operatorname{sn} t$.

La función $\operatorname{sn} t$ aparece, por ejemplo, en el problema del péndulo matemático que consiste en estudiar las oscilaciones que realiza en el plano vertical una bola pesada de masa m suspendida a un hilo fino de longitud l (fig. 12). Supongamos que el hilo se ha separado en un ángulo θ_0 de la posición de equilibrio

y después la bola ha sido abandonada con velocidad inicial nula.

En la posición correspondiente al ángulo θ, la velocidad de la bola es $v = l\,\frac{d\theta}{dt}$ mientras que su energía cinética (fuerza viva) es $\frac{mv^2}{2} = \frac{ml^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$. Según el teorema de las fuerzas vivas, ella debe

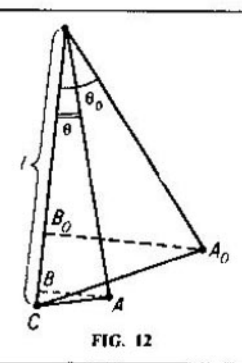


FIG. 12

ser igual en este caso al trabajo que realiza la fuerza de gravedad (prescindimos de la resistencia del aire):

$$mg\,B_0B = mgl\,(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Luego,

$$\frac{ml^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mgl\,(\cos\theta - \cos\theta_0),$$

de donde

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\cdot\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

(aquí se ha tomado el signo menos porque el ángulo θ primero decrece cuando t aumenta) o, integrando,

$$t = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\theta_0}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\theta}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\theta}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\theta_0}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Efectuemos bajo el signo de la integral el cambio de variable según la fórmula

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}=\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}\,\eta;$$

es evidente que η tiene una interpretación geométrica sencilla, a saber:

$$\eta=\frac{AC}{A_0C}.$$

Obtenemos:

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_{\eta}^{1}\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)\left(1-\operatorname{sen}^2\frac{\theta_0}{2}\,\eta^2\right)}}.$$

Designando la constante

$$\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_{0}^{1}\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)\left(1-\operatorname{sen}^2\frac{\theta_0}{2}\,\eta^2\right)}}$$

por t_0 (t_0 es el momento en el que el péndulo pasa por primera vez por la posición de equilibrio), escribiremos la última fórmula así:

$$t_0-t=\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_{0}^{\eta}\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)\left(1-\operatorname{sen}^2\frac{\theta_0}{2}\,\eta^2\right)}},$$

de donde

$$\int\limits_{0}^{\eta}\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)\left(1-\operatorname{sen}^2\frac{\theta_0}{2}\,\eta^2\right)}}=\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t_0-t)$$

y, por consiguiente,

$$\eta = \frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}} = \operatorname{sn}\left[\sqrt{\frac{g}{l}}(t_0 - t),\ \operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}\right].$$

Es decir, hemos expresado la magnitud η que caracteriza la separación del péndulo en el momento t de la posición de equilibrio a través de la función elíptica de Jacobi de módulo $k = \operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}$.

11. Es natural exigir que el polinomio

$$P(\eta) = 1 + m\eta^2 + n\eta^4$$

de la fórmula (35) no sea un cuadrado perfecto. En el caso contrario $\sqrt{P(\eta)}$ tendrá la forma $1 + q\eta^2$ y la integral (35) se expresará a través del arco tangente (si $q > 0$) o a través del logaritmo de una función fraccionaria lineal (si $q < 0$). En cada uno de estos casos el estudio de la función inversa no da nada nuevo. Por ello, en lo sucesivo aceptamos que

$$m^2 - 4n \neq 0. \tag{36}$$

Desde aquí habrá que distinguir dos casos.

I. $P(\eta)$ no tiene ceros reales. Esto significa que el trinomio de segundo grado $1 + mz + nz^2$ no tiene ceros reales ($m^2 - 4n < 0$) o que sus ceros son números reales negativos ($m^2 - 4n > 0$, $n > 0$, $m > 0$). En este caso $P(\eta) > 0$ para todo η (real). Por eso la integral (35) es una función definida y estrictamente creciente en todo el eje numérico. Designemos

$$\int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\sqrt{1 + m\eta^2 + n\eta^4}}$$

por A. Para $n = 0$ esta integral diverge y $A = \infty$; para $n \neq 0$, converge y A es un número positivo finito. Si y aumenta continuamente de $-\infty$ a $+\infty$, la integral (35) crece continuamente desde $-A$ hasta $+A$; por eso, la función inversa $y = s(t)$ queda definida en este caso en el intervalo $(-A,\ +A)$ y crece continuamente en él de $-\infty$ a $+\infty$. El ejemplo más sencillo de este caso es el seno hiperbólico (para él $A = \infty$).

II. Entre los ceros de $P(\eta)$ hay reales (dos o cuatro). Esto significa que $m^2 - 4n > 0$ y bien $n < 0$, bien $n > 0$ y $m < 0$. Sea α el cero positivo menor. Entonces $-\alpha$ es el cero negativo de valor absoluto menor y, por consiguiente, el polinomio $P(\eta)$ no tiene ceros en el intervalo $(-\alpha, \alpha)$. Por eso, $P(\eta)$ no cambia de signo en dicho intervalo, o sea, permanece positivo ya que $P(0) = 1 > 0$ (observemos que $P(\eta)$ se hace negativo cuando η pasa, al crecer, por el valor α). La integral (35) es una función definida y estrictamente creciente en el intervalo $(-\alpha, \alpha)$. Designemos

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\eta}{\sqrt{1 + m\eta^2 + n\eta^4}}$$

por a $(a > 0)$. Si y aumenta continuamente desde $-\alpha$ hasta α, la integral (35) también crece continuamente desde $-a$ hasta a; por ello, la función inversa $y = s(t)$ queda definida en este caso en el intervalo $(-a, a)$ y crece continuamente en él desde $-\alpha$ hasta α. Los ejemplos más sencillos de este caso son el seno circular $\left(\text{para él } \alpha = 1 \text{ y } a = \frac{\pi}{2}\right)$ y el seno lemniscático $\left(\alpha = 1 \text{ y } a = \frac{\omega}{2}\right)$.

En el caso de la función de Jacobi en el que

$$1 + m\eta^2 + n\eta^4 = (1 - \eta^2)(1 - k^2\eta^2) \quad (0 < k < 1),$$

tenemos:

$$\alpha = 1 \quad \text{y} \quad a = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(1 - \eta^2)(1 - k^2\eta^2)}}.$$

El último valor se denomina *integral elíptica completa de primera especie en la forma normal de Legendre*. Se designa así: $K(k)$ o brevemente K; existen para ella tablas especiales. Notemos que ω se expresa sencillamente a través de $K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. En efecto,

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(1 - \eta^2)\left(1 - \frac{1 - \eta^2}{2}\right)}}.$$

Poniendo ahora $1 - \eta^2 = y^2$, obtenemos:

$$\frac{\omega}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)\left(1 - \frac{1}{2} y^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Así pues, si definimos las funciones sen t, sh t, sl t y sn (t, k) como funciones inversas de integrales, sólo sh t quedará definido en todo el eje numérico. En cuanto a sen t, sl t y sn (t, k) quedarán definidas tan sólo en los siguientes intervalos finitos:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}; \quad -\frac{\omega}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\omega}{2}; \quad -K \leqslant t \leqslant K.$$

En el capítulo siguiente mostraremos cómo, sin abandonar la concepción aceptada de *basar la exposición en la inversión de integrales*, se puede extender estas definiciones no sólo para valores reales cualesquiera sino incluso para valores imaginarios de t. Es verdad que en este camino no descubriremos inmediatamente las fórmulas de reducción ni la periodicidad de sen t y de sl t de las que se trató en el primer capítulo. Pero el teorema de adición, que será obtenido en el cuarto capítulo, permitirá establecer fácilmente estos y muchos otros resultados que rebasan ampliamente los márgenes de todo cuanto se puede descubrir limitándose a las definiciones geométricas de los senos.

CAPÍTULO III

INTEGRACIÓN EN EL PLANO COMPLEJO

12. Se ha dicho ya que las propiedades de los senos, la semejanza y la diferencia entre los mismos se pueden estudiar con plenitud si se consideran éstos como funciones de la variable compleja $t = \sigma + i\tau$ (σ y τ son números reales e i es la unidad imaginaria). Por supuesto, no podremos entonces interpretar t como área o longitud de arco y los valores correspondientes de los senos como ordenadas de un punto o longitudes de cuerdas. La definición se basará en la integral

$$t = \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}, \qquad (37)$$

cuyo extremo superior w es un número complejo: $w = u + iv$ (u y v son números reales).

Igual que en el segundo capítulo, aceptaremos que m y n son números reales con la particularidad de que $m^2 - 4n \neq 0$. La integral (37) es un caso particular de la integral de tipo:

$$\int_0^w R\left(z, \sqrt{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4}\right) dz, \qquad (38)$$

donde bajo el signo de la integral aparece una función racional respecto a z y a la raíz cuadrada de un polinomio de cuarto grado todo lo más. Tal integral se denomina generalmente *elíptica* (siempre que el integrando no se reduzca a una función racional respecto a z y a la raíz cuadrada de un polinomio de segundo grado todo lo más). En particular, para que la integral (37) sea elíptica es necesario que $m^2 - 4n \neq 0$ y $n \neq 0$. El propio nombre de «elíptica» se debe a que la longitud de un arco de la elipse se expresa a través de la integral de tipo (38). En efecto, si la ecuación de la elipse es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b \neq a$), la longitud del arco

CA (fig. 13) se representa por la integral siguiente:

$$\text{longitud } \widehat{CA} = \int_x^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_x^a \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx =$$
$$= \frac{1}{a}\int_x^a \frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)[a^4 - (a^2 - b^2)x^2]}}\, dx.$$

13. Detengámonos, ante todo, en cómo debe entenderse la integral (37) en el caso en el que w es un número complejo y en

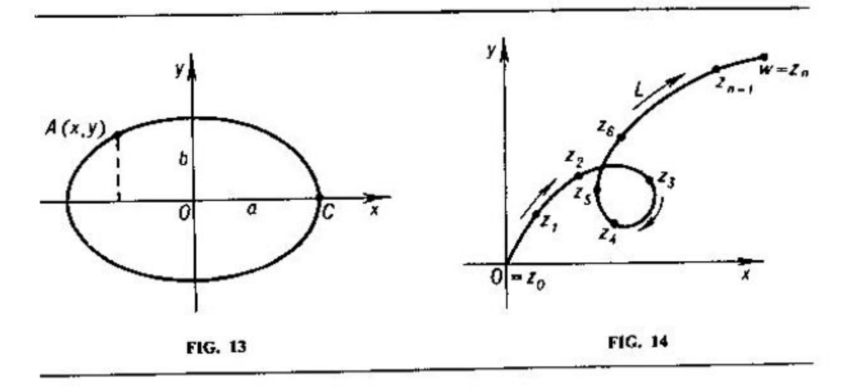


FIG. 13 FIG. 14

las propiedades generales que posee. Tendremos que aceptar sin demostración algunas afirmaciones; la argumentación de las mismas aparece en los libros de la teoría de funciones de variable compleja.

Tomemos en el plano un sistema cartesiano rectangular de coordenadas. Consideraremos que todo punto (x, y) representa el número complejo $z = x + iy$; en lo sucesivo también aplicaremos el término «punto» al número complejo que le corresponde.

Unamos el origen de coordenadas $z = 0$ y un punto $w = u + iv$ por medio de una curva continua L (fig. 14) de longitud finita (el hecho de que la curva arranca precisamente del origen de coordenadas no es substancial para las consideraciones posteriores). Dividamos L en arcos mediante los puntos $z_0 = 0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = w$, enumerados según el sentido de recorrido a lo largo de L desde 0 hasta w, y formemos la «suma integral» correspondiente

a la función $\dfrac{1}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + mz_k^2 + nz_k^4}} (z_k - z_{k-1}). \tag{39}$$

Como $\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}$ es una función biforme, convendremos de los dos valores $+1$ y -1 que tiene la raíz para $z = z_0 = 0$ tomar el valor $+1$ y, una vez escogido el valor de la raíz en un punto z_{k-1}, tomar en el punto siguiente aquel de los dos valores posibles que es más próximo al encontrado anteriormente. Entonces, para cada partición de la curva L, la suma (39) tendrá un valor totalmente definido. Pasemos ahora a particiones cada vez más pequeñas de L de modo que la longitud del mayor de los arcos tienda a cero. Se puede demostrar que la suma (39) tenderá entonces hacia un límite determinado que se denomina integral de $\dfrac{1}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}$ a lo largo de L y se designa por el símbolo

$$\int_L \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}. \tag{40}$$

Si el punto w se encuentra en el eje real Ox (o sea, $w = u$ y $v = 0$) y si, además, el segmento $[0, u]$ no contiene ceros del polinomio $1 + mz^2 + nz^4$ y L coincide con este segmento, entonces todos los valores $z_0 = 0$, z_1, ..., z_n de z son números reales mientras que los valores de $\sqrt{1 + mz_j^2 + nz_j^4}$ son reales y positivos y llegamos a la definición corriente da la integral $\displaystyle\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1 + mx^2 + nx^4}}$. Por analogía, también en el caso general se suele escribir la integral (40) en la forma

$$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}} \tag{41}$$

sin indicar la curva L a lo largo de la cual se realiza la integración

(o sea, para los puntos de la cual se construyen las sumas integrales (39)). Pero esta forma de escribir introduce cierta indeterminación. La cosa consiste en que las integrales (40) correspondientes a dos distintas curvas L_1 y L_2 que unen los puntos 0 y w, pueden tener valores que no coinciden uno con

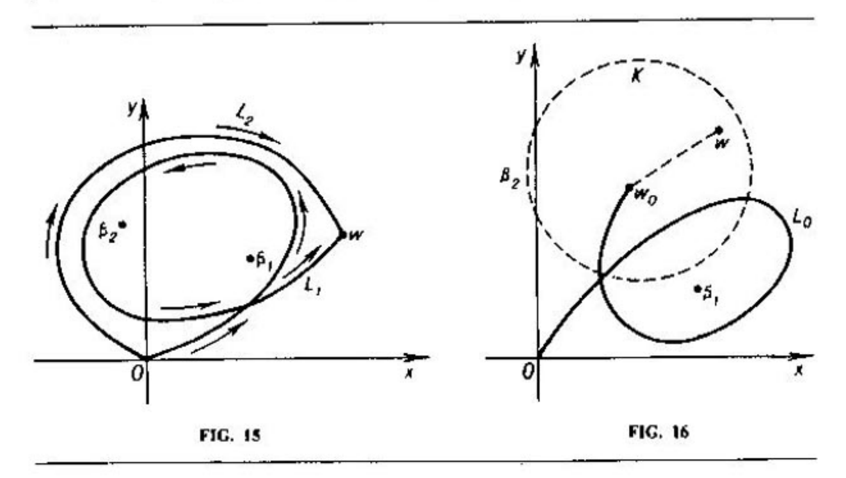


FIG. 15 FIG. 16

el otro. Sin embargo, en el curso de la teoría de funciones de variable compleja se demuestra que esto puede ocurrir sólo si las curvas L_1 y L_2 forman cierto número de vueltas alrededor de los ceros del polinomio $1 + mz^2 + nz^4$ en los que se convierte en infinito la función integrando (véase la fig. 15 donde β_1 y β_2 representan dos de los cuatro ceros de este polinomio; L_1 y L_2 forman dos vueltas en torno del par β_1 y β_2). En este caso la diferencia entre los dos valores de la integral depende de qué ceros aparecen dentro de las vueltas y del número de estas vueltas. Gracias a ello, la integral (41) tiene para todo w un conjunto infinito de valores distintos, o sea, representa una función multiforme $F(w)$; designaremos por la letra t (t es un número complejo) cualquier valor de la misma:

$$t = \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}} = F(w). \qquad (42)$$

Supongamos que w_0 no coincide con ninguno de los ceros del polinomio $1 + mw^2 + nw^4$, o sea,

$$1 + mw_0^2 + nw_0^4 \neq 0;$$

entonces, podemos describir en torno de w_0 un círculo K que tampoco contiene ningún cero de este polinomio (fig. 16). Tomemos una curva L_0 que une $z = 0$ y w_0; para los puntos w del círculo K tomaremos las curvas que se obtienen agregando a L_0 el segmento rectilíneo que une w_0 y w. Con estas condiciones suplementarias la integral (42) determinará en el círculo una función uniforme de w que representará una *rama uniforme de la función* $F(w)$ en el círculo K. Su valor en el punto w será igual a la integral a lo largo de L_0 sumada con la integral a lo largo del segmento de la recta w_0w. Para pasar a otra rama, bastará sustituir la curva L_0 *por otra curva* L_0' a la cual le corresponde otro valor de la integral en el punto w_0. Es fácil ver que las ramas correspondientes diferirán, en K, en un sumando constante; se puede demostrar que cada una de estas ramas tiene derivada en cualquier punto w del círculo K siendo

$$\frac{dt}{dw} = \lim_{w_1 \to w} \frac{t_1 - t}{w_1 - w} = \frac{1}{\sqrt{1 + mw^2 + nw^4}}. \tag{43}$$

En otras palabras, también para la integral compleja (42) resulta válido el teorema de que la derivada de una integral respecto al extremo superior de integración es igual al valor de la función integrando en el punto correspondiente.

Además, se puede demostrar que los valores que toma nuestra integral en un punto w_1 del plano no pueden coincidir con ninguno de los valores que toma la integral en otro punto w_2 $(w_2 \neq w_1)$. En otras palabras, a un valor dado t de la integral le corresponde sólo un w en tanto que extremo superior de la integral *).

Todo ello da pie para considerar w en la fórmula (42) como una función uniforme de la variable compleja t, o sea, *para considerar el extremo superior de la integral como función de la propia integral*. Designemos esta función por

$$w = s(t) \tag{44}$$

*) Una demostración detallada de este hecho se puede encontrar en Goursat E., Cours d'analyse mathématique, vol. II, 7ª ed., 1949, Gauthier-Villars, Paris (Goursat E., Curso de análisis matemático). Es verdad que presupone el conocimiento de la teoría general de las funciones analíticas y de los fundamentos de la teoría de funciones elípticas.

y continuemos denominándola *seno generalizado.*

De (43) se deduce que

$$dw = \sqrt{1 + mw^2 + nw^4}\, dt. \tag{45}$$

En cuanto a la multiformidad de la integral (42) que se manifiesta en que a un mismo w le corresponde un conjunto infinito de distintos valores de t, esta propiedad se convierte para la función inversa (44) en la siguiente: un mismo valor w se obtiene para un conjunto infinito de valores t. En concordancia con esto, veremos más abajo (capítulo VI) que la función $s(t)$ es una función periódica de t.

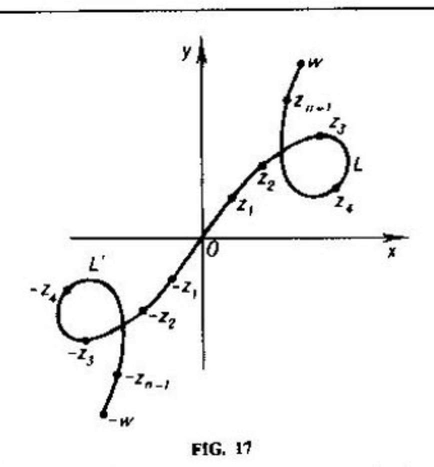


FIG. 17

14. Comparemos los valores de la integral (42) para dos puntos w y $-w$ simétricos respecto al origen de coordenadas realizando cada vez la integración a lo largo de dos curvas recíprocamente simétricas L y L' (fig. 17). Si la curva L es dividida en arcos por los puntos $z_0 = 0$, z_1, z_2, ..., $z_n = w$ y la suma integral correspondiente es

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + mz_k^2 + nz_k^4}} (z_k - z_{k-1}), \tag{46}$$

entonces la curva L' es dividida en arcos simétricos por los puntos simétricos $-z_0 = 0$, $-z_1$, $-z_2$, ..., $-z_n = -w$ y la suma integral

correspondiente

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + mz_k^2 + nz_k^4}} (-z_k + z_{k-1}) \tag{46'}$$

difiere en el signo de la anterior. Pero la primera tiene el límite

$$\int_L \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}},$$

que es uno de los valores de

$$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}},$$

y la segunda tiene el límite

$$\int_{L'} \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}},$$

que es uno de los valores de

$$\int_0^{-w} \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}.$$

De lo dicho se ve que estos valores sólo en el signo difieren uno del otro. En otras palabras, si

$$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}} = t,$$

entonces

$$\int_0^{-w} \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}} = -t$$

(a condición de que la integración se realice por dos curvas recíprocamente simétricas respecto al punto $z = 0$).

De aquí se deduce que si al valor t de la integral le corresponde el valor w del extremo superior, entonces al valor $-t$ le corresponde el extremo superior $-w$; dicho de otro modo:

$$\text{si } s(t) = w, \text{ entonces } s(-t) = -w,$$

o sea,

$$s(-t) = -s(t). \tag{47}$$

Esto significa que la *función* $s(t)$ *inversa de la integral* (42) *es impar.*

15. En el punto anterior se han comparado los valores de la integral a lo largo de dos curvas L y L', donde L' se obtenía de L por efecto de un giro de ángulo π alrededor del origen de coordenadas. Ahora compararemos los valores de las integrales a lo largo de las curvas L y L'', donde L'' se obtiene de L por

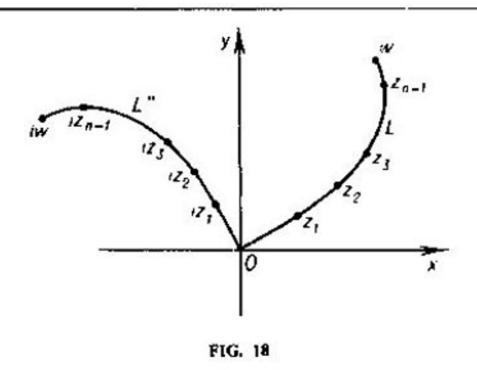


FIG. 18

efecto de un giro de ángulo $\frac{\pi}{2}$ alrededor del origen de coordenadas (fig. 18). Observemos que a este giro le corresponde la multiplicación de cada punto de L (o sea, del número complejo que representa este punto) por el número i.

Es obvio que si la curva L unía 0 con el punto w, la curva L'' unirá 0 con el punto iw.

Dividamos la curva L en arcos mediante los puntos $z_0 = 0$, z_1, z_2, ..., z_{n-1}, $z_n = w$; la suma integral correspondiente a la función

$\dfrac{1}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}$ es:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + mz_k^2 + nz_k^4}} (z_k - z_{k-1}). \qquad (48)$$

Los puntos que obtienen de los señalados por efecto de un giro de $\dfrac{\pi}{2}$ alrededor del origen de coordenadas, se encuentran en la curva L''. Son los puntos: $iz_0 = 0$, iz_1, iz_2, ..., iz_{n-1}, $iz_n = iw$; la suma integral correspondiente a la misma función $\dfrac{1}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}$ es de la forma:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 - mz_k^2 + nz_k^4}} \cdot (iz_k - iz_{k-1}). \qquad (49)$$

Si la partición de la curva L varía de modo que la mayor de las longitudes de los arcos $\widehat{z_{k-1}z_k}$ tiende hacia el cero, la primera suma tiende hacia el límite

$$\int_L \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}},$$

que representa uno de los valores de la función multiforme

$$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}.$$

La comparación de (49) y (48) muestra que (49) se puede considerar comó la suma integral formada para esta misma curva pero para otra función, a saber, para la función

$$\frac{i}{\sqrt{1 - mz_k^2 + nz_k^4}}.$$

Por eso, el límite de (49) es igual a la integral

$$i \int_L \frac{dz}{\sqrt{1 - mz^2 + nz^4}}$$

que representa uno de los valores de la función multiforme

$$i \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 - mz^2 + nz^4}}.$$

Por otra parte, este mismo límite debe ser igual a la integral

$$\int_{L''} \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}},$$

o sea, a uno de los valores de

$$\int_0^{iw} \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}$$

(porque la suma integral (49) se ha formado precisamente para la curva L'' y para la función $\frac{1}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}$) De lo dicho se deduce que a todo valor

$$\int_0^{iw} \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}$$

le corresponde un valor igual

$$i \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 - mz^2 + nz^4}},$$

y viceversa.

En otras palabras, si

$$\int_0^{iw} \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}} = t \quad \text{y} \quad \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 - mz^2 + nz^4}} = t^*,$$

entonces $t = it^*$ con la condición de que en la primera integral la integración se realiza a lo largo de la curva L'' que se obtiene de la curva L (a lo largo de la cual se toma la segunda integral) por efecto de un giro de ángulo $\frac{\pi}{2}$ alrededor del origen de coordenadas.

Designemos por $s^*(t)$ la función inversa de la integral

$$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 - mz^2 + nz^4}};$$

es evidente que también $s^*(t)$ es un seno generalizado.

De la igualdad

$$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 - mz^2 + nz^4}} = t^*$$

se deduce que $w^* = s^*(t^*)$. Además, $iw = s(t)$ y $t = it^*$; por eso,

$$s(t) = s(it^*) = iw = is^*(t^*);$$

en definitiva, omitiendo * en la designación t^*:

$$s(it) = is^*(t). \tag{50}$$

Esta relación vincula los valores de los dos senos generalizados, el primero de los cuales representa la inversión de la integral

$$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}$$

y el segundo, la inversión de la integral

$$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 - mz^2 + nz^4}}.$$

16. Basándose en los resultados expuestos más arriba, consideraremos en lo sucesivo cada uno de los casos particulares del

seno generalizado como una función de variable compleja. A saber: el seno circular $w = \operatorname{sen} t$, función inversa de la integral

$$t = \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}};$$

el seno hiperbólico $w = \operatorname{sh} t$, función inversa de la integral

$$t = \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}};$$

el seno lemniscático $w = \operatorname{sl} t$, función inversa de la integral

$$t = \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}};$$

la función elíptica de Jacobi (seno de amplitud) $w = \operatorname{sn}(t, k)$, la función inversa de la integral

$$t = \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} \quad (0 < k < 1).$$

Si t toma valores reales, podemos afirmar que las funciones $\operatorname{sen} t$, $\operatorname{sh} t$ y $\operatorname{sl} t$ aquí definidas coinciden con las funciones del primer capítulo sólo, por ahora, en aquellos intervalos en los cuales las últimas eran inversiones de integrales correspondientes. Para $\operatorname{sen} t$ esto significa que $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$; para $\operatorname{sl} t$, que $-\frac{\omega}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\omega}{2}$; y sólo para $\operatorname{sh} t$ no hay limitaciones porque en este caso la inversión se obtiene en todo el eje numérico a la vez (segundo capítulo)

Del punto 14 se deduce que cada una de estas funciones es impar:

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t, \qquad \operatorname{sh}(-t) = -\operatorname{sh} t, \qquad (51)$$
$$\operatorname{sl}(-t) = -\operatorname{sl} t, \qquad \operatorname{sn}(-t) = -\operatorname{sn} t.$$

Para emplear los resultados del punto 15, es necesario considerar, aparte de $s(t)$, la función correspondiente $s^*(t)$. El paso de $s(t)$ a $s^*(t)$ corresponde al cambio de signo del coeficiente de z^2 en el polinomio $1 + mz^2 + nz^4$ que figura bajo el signo de la integral. Para hacer más cómodas las consideraciones, escribiremos la tabla de las funciones $s(t)$ y $s^*(t)$ correspondientes a los cuatro casos particulares que aquí se analizan:

Integral	Inversión	Integral	Inversión
$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}$	$s(t)$	$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 - mz^2 + nz^4}}$	$s^*(t)$
$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$	$\operatorname{sen} t$	$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}}$	$\operatorname{sh} t$
$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}}$	$\operatorname{sh} t$	$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$	$\operatorname{sen} t$
$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}}$	$\operatorname{sl} t$	$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}}$	$\operatorname{sl} t$
$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}$	$\operatorname{sn}(t, k)$	$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{(1 + z^2)(1 + k^2z^2)}}$	$\operatorname{sn}^*(t, k)$

Aplicando a cada uno de estos casos particulares la fórmula general (50), encontramos:

$$\operatorname{sen}(it) = i \operatorname{sh} t, \tag{52}$$

$$\operatorname{sh}(it) = i \operatorname{sen} t, \tag{53}$$

$$\operatorname{sl}(it) = i \operatorname{sl} t, \tag{54}$$

$$\operatorname{sn}(it, k) = i \operatorname{sn}^*(t, k). \tag{55}$$

Es fácil ver que las fórmulas (51) se desprenden de las últimas fórmulas. Por ejemplo, de las fórmulas (52) y (53), aplicándolas

sucesivamente, deducimos:

$$\operatorname{sen}(-t) = \operatorname{sen}[i(it)] = i \operatorname{sh}(it) = i \cdot i \operatorname{sen} t = -\operatorname{sen} t.$$

17. Los resultados de los puntos 14 y 15 se pueden obtener muy fácilmente si se da por demostrado que también es aplicable a integrales de funciones de variable compleja la conocida regla de sustitución de la variable bajo el signo de la integral. En los cursos de la teoría de funciones de variable compleja se demuestra que esta regla efectivamente se puede aplicar en condiciones bastante amplias que se cumplen para los ejemplos considerados más abajo.

Realicemos primero en la integral $\int\limits_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}$ la sustitución: $z = -\zeta$. Obtenemos

$$t = \int\limits_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}} = -\int\limits_0^{-w} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 + m\zeta^2 + n\zeta^4}}.$$

Pasando a las funciones inversas, deducimos:

$$w = s(t), \quad -w = s(-t), \quad \text{o sea,} \quad s(-t) = -s(t).$$

Si realizamos otra sustitución: $z = -i\zeta$, o sea, $\zeta = iz$, obtenemos

$$t = \int\limits_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}} = -\int\limits_0^{iw} \frac{id\zeta}{\sqrt{1 - m\zeta^2 + n\zeta^4}}.$$

Pasando a las funciones inversas, deducimos:

$$w = s(t), \quad iw = s(it), \quad \text{o sea,} \quad s(it) = is(t).$$

Empleemos también la regla de la sustitución de la variable para expresar la función $\operatorname{sn}^*(t, k)$ inversa de la integral

$$\int\limits_0^w \frac{dz}{\sqrt{(1 + z^2)(1 + k^2z^2)}} \quad (0 < k < 1)$$

a través de la función de Jacobi $\operatorname{sn} t$ con el módulo correspondiente. Con este fin realicemos la siguiente sustitución de la

variable: $z = \dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$. Después de simplificar, obtenemos

$$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)}} = \int_0^{\frac{w}{\sqrt{1+w^2}}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)[1-(1-k^2)\zeta^2]}}.$$

Pongamos $k' = \sqrt{1-k^2} > 0$ (k' se denomina *módulo complementario respecto a* k). Entonces la igualdad

$$t = \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)}},$$

que significa que $w = \mathrm{sn}^*(t, k)$, se puede escribir así:

$$t = \int_0^{\frac{w}{\sqrt{1+w^2}}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k'^2\zeta^2)}},$$

de donde

$$\frac{w}{\sqrt{1+w^2}} = \mathrm{sn}\,(t, k')$$

o

$$w = \mathrm{sn}^*(t, k) = \frac{\mathrm{sn}^2(t, k')}{\sqrt{1-\mathrm{sn}^2(t, k')}}.$$

Por eso, la igualdad (55) se sustituye por la siguiente:

$$\mathrm{sn}\,(it, k) = i\frac{\mathrm{sn}\,(t, k')}{\sqrt{1-\mathrm{sn}^2(t, k')}}, \qquad (55')$$

donde $k' = \sqrt{1-k^2}$.

CAPÍTULO IV

MÉTODO DE EULER DE DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE ADICIÓN

18. Toda la Trigonometría se basa en los teoremas de adición:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta,\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.\end{aligned} \tag{56}$$

Empleando la relación existente entre el seno y el coseno, se pueden escribir de modo que el valor $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ se exprese exclusivamente a través de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{sen}\beta$ y el valor $\cos(\alpha+\beta)$, sólo a través de $\cos\alpha$ y $\cos\beta$:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\beta}+\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}\operatorname{sen}\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sqrt{1-\cos^2\alpha}\sqrt{1-\cos^2\beta}.$$

No escribimos aquí dobles signos delante de la raiz, suponiendo que se toma el signo correspondiente al valor de la función circular que expresa esta raíz. Por ejemplo,

$$\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{6}}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{4}}=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ etc.}$$

Cada una de las fórmulas (56) expresa algebraicamente el valor de la función de la suma de dos números a través de los valores de esta misma función para cada uno de los sumandos. Precisamente fórmulas de este género se denominan *teoremas algebraicos de adición* y en cuanto a las funciones, para las cuales tienen lugar semejantes teoremas, se dice que estas *funciones poseen* o *cumplen el teorema algebraico de adición*. De modo que el seno y el coseno cumplen los teoremas algebraicos de adición. Otros ejemplos son la función lineal $y=at$ o la exponencial $y=e^t$. Efectivamente,

$$a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta,\quad e^{\alpha+\beta}=e^\alpha\cdot e^\beta.$$

19. Nuestro objetivo inmediato será deducir el teorema de

adición para la función $w = s(t)$ inversa respecto a la integral

$$t = \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}}.$$

En particular, obtendremos los teoremas de adición para $\operatorname{sen} t$, $\operatorname{sh} t$, $\operatorname{sl} t$ y $\operatorname{sn}(t, k)$. En este punto esbozaremos la idea de la solución de este problema.

Sean α y β unos números complejos y sea $\gamma = \alpha + \beta$. Pongamos

$$u = s(\alpha), \quad v = s(\beta) \quad \text{y} \quad w = s(\alpha + \beta).$$

Esto significa que

$$\alpha = \int_0^u \frac{dy}{\sqrt{1 + my^2 + ny^4}}, \quad \beta = \int_0^v \frac{dy}{\sqrt{1 + my^2 + ny^4}},$$

$$\gamma = \int_0^w \frac{dy}{\sqrt{1 + my^2 + ny^4}}. \tag{57}$$

Si α y β varían de modo que su suma γ permanece constante:

$$\alpha + \beta = \gamma = \text{const}, \tag{58}$$

entonces

$$d(\alpha + \beta) = 0,$$

o sea,

$$d\left(\int_0^u \frac{dy}{\sqrt{1 + my^2 + ny^4}} + \int_0^v \frac{dy}{\sqrt{1 + my^2 + ny^4}}\right) = 0,$$

o

$$\frac{du}{\sqrt{1 + mu^2 + nu^4}} + \frac{dv}{\sqrt{1 + mv^2 + nv^4}} = 0. \tag{59}$$

Esta es una ecuación diferencial que vincula los valores $u = s(\alpha)$ y $v = s(\beta)$ dada la condición (58). Demostraremos más abajo que

la ecuación (59) posee una integral algebraica y la encontraremos. Hablando con más precisión, encontraremos una función algebraica $F(u, v)$ que se convierte en u para $v = 0$ (y en v para $u = 0$) cuya diferencial es igual a cero en virtud de la condición (59) (ó (58)). En otras palabras, de (58) se deducirá que

$$dF(u, v) = 0 \quad \text{y} \quad F(u, v) = C = \text{const.} \tag{60}$$

Para determinar la constante C, pongamos $\beta = 0$. Entonces $v = s(\beta)$ se convertirá en cero y $F(u, v)$ coincidirá con $u = s(\alpha)$. Pero si $\beta = 0$, entonces $\alpha = \gamma$ en virtud de (58) y, por consiguiente, $u = s(\alpha) = s(\gamma)$, de donde

$$C = F(u, v)|_{\beta=0} = u|_{\alpha=\gamma} = s(\gamma).$$

Luego,

$$F(u, v) = F[s(\alpha), s(\beta)] = s(\gamma) = s(\alpha + \beta).$$

Esta relación no depende del valor que tome la suma $\alpha + \beta = \gamma$. Obtenemos, por lo tanto, el teorema algebraico de adición para la función $s(t)$:

$$s(\alpha + \beta) = F[s(\alpha), s(\beta)].$$

De esta forma, el problema de deducción del teorema algebraico de adición para la función $s(t)$ se reduce a la determinación de la integral de la ecuación (59) que posee las propiedades mencionadas más arriba.

20. Para hallar la integral algebraica de la ecuación (59) emplearemos el método que propuso Euler en su «Cálculo Integral», vol. I, (1768)*). Partiremos de la siguiente ecuación algebraica de cuarto grado que relaciona las variables u y v y que contiene tres parámetros arbitrarios A, B y C:

$$u^2 + v^2 + Au^2v^2 + 2Buv - C^2 = 0. \tag{61}$$

Diferenciándola, obtenemos:

$$(u + Bv + Auv^2)\,du + (v + Bu + Au^2v)\,dv = 0. \tag{62}$$

Pero, escribiendo (61) en la forma

$$(Av^2 + 1)u^2 + 2Bvu + (v^2 - C^2) = 0,$$

multiplicando ambos miembros por $Av + 1$ y formando el cuadrado

*) Damos aquí a este método una forma más sencilla, suficiente para alcanzar el objetivo que nos hemos planteado.

perfecto, encontramos:

$$[(Av^2 + 1)u + Bv]^2 - [(C^2 - v^2)(Av^2 + 1) + B^2v^2] = 0,$$

de donde

$$u + Bv + Auv^2 = \sqrt{C^2 + (B^2 + AC^2 - 1)v^2 - Av^4}. \qquad (61')$$

Tampoco aquí escribimos dobles signos suponiendo que de los dos valores de la raíz cuadrada se debe escoger aquel que coincide con el primer miembro (una observación análoga se refiere también a las fórmulas consideradas más abajo en las que figuran raíces cuadradas).

La ecuación (61) es simétrica respecto a u y v; cambiando u y v, obtenemos de (61'):

$$v + Bu + Au^2v = \sqrt{C^2 + (B^2 + AC^2 - 1)u^2 - Au^4}. \qquad (61'')$$

Introduciendo (61') y (61'') en (62), encontraremos:

$$\sqrt{C^2 + (B^2 + AC^2 - 1)v^2 - Av^4}\,du + \\ + \sqrt{C^2 + (B^2 + AC^2 - 1)u^2 - Au^4}\,dv = 0$$

o

$$\frac{du}{\sqrt{C^2 + (B^2 + AC^2 - 1)u^2 - Au^4}} + \\ + \frac{dv}{\sqrt{C^2 + (B^2 + AC^2 - 1)v^4 - Av^4}} = 0. \qquad (59')$$

Puesto que la ecuación diferencial (59') se satisface para todos los valores u y v vinculados por la relación algebraica (61), resulta que (61) es una integral algebraica de (59').

Escojamos ahora A, B y C de modo que (59') sea idéntica a la ecuación (59) del punto anterior.

Para ello bastará poner

$$B^2 + AC^2 - 1 = mC^2 \quad \text{y} \quad A = -nC^2.$$

Expresemos A y B a través de m, n y C; entonces la ecuación (59') tomará (después de multiplicar todos sus términos por C) la forma:

$$\frac{du}{\sqrt{1 + mu^2 + nu^4}} + \frac{dv}{\sqrt{1 + mv^2 + nv^4}} = 0 \qquad (59)$$

y su integral (61),

$$u^2 + v^2 - nC^2u^2v^2 + 2\sqrt{1 + mC^2 + nC^4}\,uv - C^2 = 0, \qquad (63)$$

donde C es una constante arbitraria.

Deseando representar (63) en la forma (60) ($F(u, v) = C$), resolvamos la ecuación (63) respecto a C. Obtenemos sucesivamente

$$[u^2 + v^2 - (nu^2v^2 + 1)\,C^2]^2 = 4\,(1 + mC^2 + nC^4)\,u^2v^2,$$

$$(1 - nu^2v^2)^2\,C^4 - 2\,[(1 + nu^2v^2)(u^2 + v^2) + 2mu^2v^2]\,C^2 + (u^2 - v^2)^2 = 0,$$

$$C^2 = \frac{(1 + nu^2v^2)(u^2 + v^2) + 2mu^2v^2}{(1 - nu^2v^2)^2} + \frac{\sqrt{[(1 + nu^2v^2)(u^2 + v^2) + 2mu^2v^2]^2 - (u^2 - v^2)^2\,(1 - nu^2v^2)^2}}{(1 - nu^2v^2)^2} =$$

$$= \frac{u^2\,(1 + mv^2 + nv^4) + v^2\,(1 + mu^2 + nu^4)}{(1 - nu^2v^2)^2} + \frac{2uv\sqrt{(1 + mu^2 + nu^4)(1 + mv^2 + nv^4)}}{(1 - nu^2v^2)^2},$$

de donde, finalmente,

$$\frac{u\sqrt{1 + mv^2 + nv^4} + v\sqrt{1 + mu^2 + nu^4}}{1 - nu^2v^2} = C. \qquad (64)$$

La función

$$F(u, v) = \frac{u\sqrt{1 + mv^2 + nv^4} + v\sqrt{1 + mu^2 + nu^4}}{1 - nu^2v^2}$$

es algebraica; para $v = 0$ se convierte en u (y para $u = 0$, en v). Dejamos al lector la comprobación de que su diferencial tiene la forma:

$$dF(u, v) = \Phi(u, v)\left(\frac{du}{\sqrt{1 + mu^2 + nu^4}} + \frac{dv}{\sqrt{1 + mv^2 + nv^4}}\right),$$

donde $\Phi(u, v)$ es una función algebraica $\not\equiv 0$; por eso, la ecuación diferencial (59) trae tras de sí, como corolario,

$$dF(u, v) = 0 \quad \text{o} \quad F(u, v) \equiv \text{const}.$$

De modo que hemos demostrado la existencia de una integral algebraica de la ecuación (59) que cumple las propiedades indicadas en el punto 19. De aquí, como se ha explicado ya en el punto 19, se desprende el teorema algebraico de adición para $s(t)$ en la forma:

$$s(\alpha + \beta) = F[s(\alpha), s(\beta)],$$

o sea,

$$s(\alpha+\beta) + \frac{s(\alpha)\sqrt{1+ms^2(\beta)+ns^4(\beta)}+s(\beta)\sqrt{1+ms^2(\alpha)+ns^4(\alpha)}}{1-ns^2(\alpha)s^2(\beta)} =$$

$$= \frac{s^2(\alpha)-s^2(\beta)}{s(\alpha)\sqrt{1+ms^2(\beta)+ns^4(\beta)}-s(\beta)\sqrt{1+ms^2(\alpha)+ns^4(\alpha)}} \qquad (65)$$

21. Del teorema general de adición (65), válido para la función $s(t)$, se obtienen como casos particulares los teoremas de adición para $\operatorname{sen} t$, $\operatorname{sh} t$, $\operatorname{sl} t$ y $\operatorname{sn}(t, k)$. Al seno circular le corresponden los valores $m = -1$ y $n = 0$; al hiperbólico, $m = 1$ y $n = 0$; al lemniscático, $m = 0$ y $n = -1$, y a la función de Jacobi, $m = -(1 + k^2)$ y $n = k^2$ $(0 < k < 1)$.

Respectivamente, de la fórmula (65) se obtienen los siguientes teoremas de adición.

Para el seno circular:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\beta} + \operatorname{sen}\beta\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}; \qquad (65')$$

para el seno hiperbólico:

$$\operatorname{sh}(\alpha + \beta) = \operatorname{sh}\alpha\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\beta} + \operatorname{sh}\beta\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\alpha}; \qquad (65'')$$

para el seno lemniscático:

$$\operatorname{sl}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sl}\alpha\sqrt{1 - \operatorname{sl}^4\beta} + \operatorname{sl}\beta\sqrt{1 - \operatorname{sl}^4\alpha}}{1 + \operatorname{sl}^2\alpha\,\operatorname{sl}^2\beta} =$$

$$= \frac{\operatorname{sl}^2\alpha - \operatorname{sl}^2\beta}{\operatorname{sl}\alpha\sqrt{1 - \operatorname{sl}^4\beta} - \operatorname{sl}\beta\sqrt{1 - \operatorname{sl}^4\alpha}}; \qquad (65''')$$

para la función $\operatorname{sn}(t, k)$:

$$\operatorname{sn}(\alpha+\beta) =$$

$$= \frac{\operatorname{sn}\alpha\sqrt{1+m\operatorname{sn}^2\beta+n\operatorname{sn}^4\beta}+\operatorname{sn}\beta\sqrt{1+m\operatorname{sn}^2\alpha+n\operatorname{sn}^4\alpha}}{1-n\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta} =$$

$$= \frac{\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\beta}{\operatorname{sn}\alpha\sqrt{1+m\operatorname{sn}^2\beta+n\operatorname{sn}^4\beta}-\operatorname{sn}\beta\sqrt{1+m\operatorname{sn}^2\alpha+n\operatorname{sn}^4\alpha}}. \qquad (65^{IV})$$

Para abreviar, escribimos $\operatorname{sn}(\alpha+\beta)$ en vez de $\operatorname{sn}(\alpha+\beta, k)$, $\operatorname{sn}\alpha$ en lugar de $\operatorname{sn}(\alpha, k)$, etc.

Es importante señalar que α y β son aquí *números complejos cualesquiera* (es verdad que en las fórmulas (65‴) y (65^{IV}) hay que imponer a α y β condiciones que excluyan la anulación de los denominadores de las fracciones).

CAPÍTULO V

ESTUDIO ULTERIOR DE LOS VALORES COMPLEJOS

22. Para los valores reales de t se cumplen las fórmulas:

$$\cos t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \quad \text{y} \quad \operatorname{ch} t = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} \tag{66}$$

donde a t igual a 0 le corresponde el valor de la raíz igual a 1.

Estas fórmulas permiten extender las definiciones de $\cos t$ y $\operatorname{ch} t$ al caso de valores complejos arbitrarios de t. Entonces las fórmulas (65') y (65") tomarán la forma:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha, \tag{67}$$

$$\operatorname{sh}(\alpha + \beta) = \operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\alpha. \tag{68}$$

De éstas y de la fórmula (66) se deducen los teoremas de adición para los cosenos circular e hiperbólico. A saber,

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\alpha + \beta)} = \\ &= \sqrt{(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)(\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta) - (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)^2} = \\ &= \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta} = \\ &= \pm(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta - \cos\alpha\cos\beta).\end{aligned}$$

Para escoger el signo, basta poner aquí $\beta = 0$; obtenemos que en el último miembro debe tomarse el signo «−», o sea,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. \tag{69}$$

Análogamente, para $\operatorname{ch}(\alpha + \beta)$ obtenemos primero

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(\alpha + \beta) &= \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(\alpha + \beta)} = \\ &= \sqrt{(\operatorname{ch}^2\alpha - \operatorname{sh}^2\alpha)(\operatorname{ch}^2\beta - \operatorname{sh}^2\beta) + (\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\beta + \operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\beta)^2} = \\ &= \sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha\operatorname{ch}^2\beta + 2\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\beta + \operatorname{sh}^2\alpha\operatorname{sh}^2\beta} = \\ &= \pm(\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\beta);\end{aligned}$$

para $\beta = 0$ obtenemos $\operatorname{ch}\alpha$ en el primer miembro y $\pm\operatorname{ch}\alpha$, en el último. Por consiguiente, en el último miembro hay que tomar el signo «+»:

$$\operatorname{ch}(\alpha + \beta) = \operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\beta. \tag{70}$$

Volviendo a las fórmulas (66), sustituimos t por it; obtenemos

$$\left.\begin{aligned}\cos(it) &= \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(it)} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = \operatorname{ch} t,\\ \operatorname{ch}(it) &= \sqrt{1+\operatorname{sh}^2(it)} = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} = \cos t\end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

(en los últimos miembros se ha tomado el signo «+» porque para $t = 0$ tanto el coseno circular como el hiperbólico se convierten en 1).

De la fórmula (66) se deduce que ambos cosenos son funciones pares:

$$\cos(-t) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} = \cos t, \quad \operatorname{ch}(-t) = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = \operatorname{ch} t. \qquad (72)$$

Del teorema de adición (67) deducimos seguidamente que la relación $\cos t = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ es válida para todos los valores complejos de t.

En efecto, poniendo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $\beta = -t$ en (67), obtenemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 1 \cdot \cos(-t) + \operatorname{sen}(-t) \cdot 0 = \cos t. \qquad (73)$$

Sustituyendo aquí t por $\frac{\pi}{2} - t$, encontraremos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t. \qquad (74)$$

De modo que las fórmulas (5) del punto 1 son válidas (y, además, para cualesquiera valores de t, tanto reales como imaginarios) si se define $\operatorname{sen} t$ como función inversa de la integral $t = \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ y $\cos t$ como $\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}$ (con la condición de que $\cos 0 = 1$). Puesto que dada esta definición, $\operatorname{sen} t$ es una función impar (fórmulas (51)) y $\cos t$ es una función par (fórmulas (72)), también continúan siendo válidas las fórmulas (4) del punto 1. Pero de las fórmulas (4) y (5), según se ha señalado en el punto 1, se deducen todas las fórmulas de «reducción del punto 1» y, en particular, la periodicidad de las funciones circulares. Por eso, en lo sucesivo se podrán emplear las fórmulas del punto 1 para

cualesquiera valores complejos de t:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\operatorname{sen} t, \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos t;$$

$$\cos(\pi-t)=-\cos t, \qquad \operatorname{sen}(\pi-t)=\operatorname{sen} t;$$

$$\cos(\pi+t)=-\cos t, \qquad \operatorname{sen}(\pi+t)=-\operatorname{sen} t;$$

$$\cos(2\pi+t)=\cos t, \qquad \operatorname{sen}(2\pi+t)=\operatorname{sen} t.$$

Resumiendo, podemos decir que las definiciones nuevas de sen t (y cos t) aceptadas (a partir del capítulo segundo) nos han conducido para valores reales de t a las funciones (definidas en todo el eje numérico) que en el punto 1 han sido introducidas partiendo de consideraciones geométricas. Observemos que para las funciones hiperbólicas sh t (y ch t) no necesitamos semejante confirmación. La diferencia entre las funciones circulares e hiperbólicas se manifiesta aquí en que sen t considerado como la función de variable real inversa de la integral $t=\int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}$ quedó definido directamente sólo en el intervalo finito $-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$ e inicialmente no teníamos información acerca de su comportamiento fuera de este intervalo; en cambiola función sh t considerada como inversión de la integral $t=\int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}$ ha quedado definida de una sola vez en todo el eje numérico (véase el segundo capítulo).

Poniendo en las fórmulas (67), (68), (69) y (70) $\alpha=\sigma$ y $\beta=i\tau$, donde σ y τ son números reales, y empleando (52), (53) y (71), obtenemos:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\sigma+i\tau)&=\operatorname{sen}\sigma\cdot\operatorname{ch}\tau+i\operatorname{sh}\tau\cdot\cos\sigma,\\
\cos(\sigma+i\tau)&=\cos\sigma\cdot\operatorname{ch}\tau-i\operatorname{sen}\sigma\cdot\operatorname{sh}\tau,\\
\operatorname{sh}(\sigma+i\tau)&=\operatorname{sh}\sigma\cdot\cos\tau+i\operatorname{sen}\tau\cdot\operatorname{ch}\sigma,\\
\operatorname{ch}(\sigma+i\tau)&=\operatorname{ch}\sigma\cdot\cos\tau+i\operatorname{sh}\sigma\cdot\operatorname{sen}\tau.
\end{aligned}\right\} \qquad (75)$$

Estas fórmulas expresan las funciones circulares e hiperbólicas para cualquier valor complejo del argumento $t=\sigma+i\tau$ a través de estas mismas funciones de variables reales σ y τ.

23. En el punto 8 hemos deducido las expresiones para ch t y sh t con t real a través de la función exponencial:

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

De aquí se deduce que

$$e^t = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t. \tag{76}$$

Puesto que más arriba hemos definido ch t y sh t para cualquier $t = \sigma + i\tau$ complejo, la fórmula (76) permite definir también la función exponencial para cualquier valor complejo de t. Aceptando esta definición, obtenemos por medio de las fórmulas (75):

$$e^{\sigma + i\tau} = \operatorname{ch}(\sigma + i\tau) + i \operatorname{sh}(\sigma + i\tau) =$$
$$= \cos\tau\,(\operatorname{ch}\sigma + \operatorname{sh}\sigma) + i \operatorname{sen}\tau\,(\operatorname{ch}\sigma + \operatorname{sh}\sigma).$$

Pero $\operatorname{ch}\sigma + \operatorname{sh}\sigma = e^\sigma$ según la fórmula (76) y por eso

$$e^t = e^{\sigma + i\tau} = e^\sigma(\cos\tau + i \operatorname{sen}\tau). \tag{77}$$

Cambiando en (76) t por it', encontraremos:

$$e^{it'} = \operatorname{ch}(it') + \operatorname{sh}(it') = \cos t' + i \operatorname{sen} t'$$

u, omitiendo la raya,

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t. \tag{78}$$

Esta fórmula se debe a Euler. Cambiando aquí t por $-t$, obtendremos

$$e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t. \tag{79}$$

De (78) y (79) deducimos otras dos fórmulas de Euler:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}. \tag{80}$$

Comprobemos que para la función exponencial e^t definida según la fórmula (76) tiene lugar el teorema de adición:

$$e^{\alpha + \beta} = e^\alpha \cdot e^\beta, \tag{81}$$

donde α y β son números complejos cualesquiera. En efecto:

$$e^{\alpha + \beta} = \operatorname{ch}(\alpha + \beta) + \operatorname{sh}(\alpha + \beta) =$$
$$= (\operatorname{ch}\alpha \cdot \operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\alpha \cdot \operatorname{sh}\beta) + (\operatorname{sh}\alpha \cdot \operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\beta \cdot \operatorname{ch}\alpha) =$$
$$= (\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha)(\operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\beta) = e^\alpha \cdot e^\beta$$

(hemos empleado las fórmulas (70) y (68) y de nuevo la fórmula (76)). En particular, $1 = e^0 = e^{\alpha-\alpha} = e^{\alpha}\cdot e^{-\alpha}$; de aquí resulta que el valor e^{α} es distinto de 0 cualquiera que sea el número complejo α.

24. Consideremos el coseno lemniscático $\mathrm{cl}\, t$. En el punto 5 esta función ha sido definida para todos los valores reales mediante la fórmula:

$$\mathrm{cl}\, t = \mathrm{sl}\left(\frac{\omega}{2} - t\right). \tag{82}$$

Tomemos (82) como definición de $\mathrm{cl}\, t$ para cualquier t complejo. Poniendo $\alpha = \frac{\omega}{2}$ y $\beta = -t$ en (65''') y observando que $\mathrm{sl}\,\frac{\omega}{2} = 1$ (18') y $\mathrm{sl}\,(-t) = -\mathrm{sl}\, t$ (51), encontramos:

$$\mathrm{cl}\, t = \mathrm{sl}\left(\frac{\omega}{2} - t\right) = \frac{\sqrt{1 - \mathrm{sl}^4 t}}{1 + \mathrm{sl}^2 t} = \sqrt{\frac{1 - \mathrm{sl}^2 t}{1 + \mathrm{sl}^2 t}}; \tag{83}$$

el valor de la raíz debe escogerse de modo que para $t = 0$ sea $\mathrm{cl}\, 0 = 1$.

La relación (83) se puede escribir en forma simétrica:

$$\mathrm{sl}^2 t + \mathrm{cl}^2 t + \mathrm{sl}^2 t\cdot \mathrm{cl}^2 t = 1. \tag{84}$$

De aquí

$$\mathrm{sl}\, t = \sqrt{\frac{1 - \mathrm{cl}^2 t}{1 + \mathrm{cl}^2 t}}. \tag{83'}$$

Observemos que cambiando t por it, obtenemos de (83) mediante (54):

$$\mathrm{cl}\,(it) = \sqrt{\frac{1 - \mathrm{sl}^2 (it)}{1 + \mathrm{sl}^2 (it)}} = \sqrt{\frac{1 + \mathrm{sl}^2 t}{1 - \mathrm{sl}^2 t}} = \frac{1}{\mathrm{cl}\, t}. \tag{85}$$

Además, la sustitución de t (complejo arbitrario) en (83) por $-t$ da mediante (51):

$$\mathrm{cl}\,(-t) = \sqrt{\frac{1 - \mathrm{sl}^2 (-t)}{1 + \mathrm{sl}^2 (-t)}} = \sqrt{\frac{1 - \mathrm{sl}^2 t}{1 + \mathrm{sl}^2 t}} = \mathrm{cl}\, t. \tag{86}$$

De modo que $\mathrm{cl}\, t$ es una función par. Mediante (83) las expresiones (65'') toman la forma:

$$\mathrm{sl}\,(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{sl}\,\alpha\, \mathrm{cl}\,\beta\,(1 + \mathrm{sl}^2 \beta) + \mathrm{sl}\,\beta\, \mathrm{cl}\,\alpha\,(1 + \mathrm{sl}^2 \alpha)}{1 + \mathrm{sl}^2 \alpha\, \mathrm{sl}^2 \beta} =$$

$$= \frac{\mathrm{sl}^2 \alpha - \mathrm{sl}^2 \beta}{\mathrm{sl}\,\alpha\, \mathrm{cl}\,\beta\,(1 + \mathrm{sl}^2 \beta) - \mathrm{sl}\,\beta\cdot \mathrm{cl}\,\alpha\,(1 + \mathrm{sl}^2 \alpha)}. \tag{87}$$

Para demostrar de la forma más sencilla posible el teorema de adición para el coseno lemniscático, cambiemos primero t por $\frac{\omega}{2} - t$ en (82); obtenemos:

$$\operatorname{cl}\left(\frac{\omega}{2} - t\right) = \operatorname{sl} t. \tag{82'}$$

De (82) se deduce a continuación:

$$\operatorname{cl}(\alpha + \beta) = \operatorname{sl}\left[\left(\frac{\omega}{2} - \alpha\right) - \beta\right] = \operatorname{sl}\left[\left(\frac{\omega}{2} - \beta\right) - \alpha\right].$$

Cambiando α por $\frac{\omega}{2} - \beta$ y β por $-\beta$ en la primera de las expresiones (87) y α por $\frac{\omega}{2} - \beta$ y β por $-\alpha$, en la segunda, y empleando las fórmulas (82) y (82'), encontraremos:

$$\operatorname{cl}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{cl}\alpha \operatorname{cl}\beta\,(1 + \operatorname{sl}^2\beta) - \operatorname{sl}\alpha \operatorname{sl}\beta\,(1 + \operatorname{cl}^2\alpha)}{1 + \operatorname{cl}^2\alpha \cdot \operatorname{sl}^2\beta} =$$

$$= \frac{\operatorname{cl}^2\beta - \operatorname{sl}^2\alpha}{\operatorname{cl}\alpha \operatorname{cl}\beta\,(1 + \operatorname{sl}^2\alpha) + \operatorname{sl}\alpha \operatorname{sl}\beta\,(1 + \operatorname{cl}^2\beta)}. \tag{88}$$

A diferencia de las expresiones (87), las últimas fracciones no parecen simétricas respecto a α y β. Pero, por supuesto, las fórmulas permanecen válidas si se cambian de lugares α y β.

25. Anteriormente hemos señalado ya que todas las «fórmulas de reducción» de las funciones circulares son corolarios de las fórmulas (4), según las cuales el $\cos t$ es función par y el $\operatorname{sen} t$ es función impar, y de las fórmulas (5) que expresan la igualdad de los valores $\cos t_1$ y $\operatorname{sen} t_2$ para $t_1 + t_2 = \frac{\pi}{2}$. Pero las funciones lemniscáticas poseen propiedades análogas: $\operatorname{cl} t$ es función par y $\operatorname{sl} t$ es función impar (fórmulas (86) y (51)); además, $\operatorname{cl} t_1$ y $\operatorname{sl} t_2$ son iguales si $t_1 + t_2 = \frac{\omega}{2}$ (fórmulas (82) y (82')). Luego, para éstas deben cumplirse las correspondientes «fórmulas de reducción» con el

cambio natural de sen por sl, de cos por cl y de π por ω:

$$\mathrm{cl}\left(\frac{\omega}{2}+t\right) = -\mathrm{sl}\,t, \qquad \mathrm{sl}\left(\frac{\omega}{2}+t\right) = \mathrm{cl}\,t;$$
$$\mathrm{cl}\,(\omega - t) = -\mathrm{cl}\,t, \qquad \mathrm{sl}\,(\omega - t) = \mathrm{sl}\,t;$$
$$\mathrm{cl}\,(\omega + t) = -\mathrm{cl}\,t, \qquad \mathrm{sl}\,(\omega + t) = -\mathrm{sl}\,t;$$
$$\mathrm{cl}\,(2\omega + t) = \mathrm{cl}\,t, \qquad \mathrm{sl}\,(2\omega + t) = \mathrm{sl}\,t.$$

De aquí se deduce, en particular, que las funciones lemniscáticas son periódicas de período 2ω. Ahora se puede afirmar que para los valores reales de t las funciones lemniscáticas, definidas mediante la inversión de la integral $t = \int\limits_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^4}}$, coinciden en todo el eje numérico con las funciones lemniscáticas definidas de forma geométrica en el punto 5.

La relación (84) muestra que para t real los valores de las funciones lemniscáticas

$$x = \mathrm{cl}\,t \quad \text{e} \quad y = \mathrm{sl}\,t$$

se pueden considerar como coordenadas del punto A que se encuentra en la siguiente curva de cuarto grado (véase la fig. 19):

$$x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1. \tag{84'}$$

Consideremos junto al punto $A\,(x, y)$ el punto $A'\,(\xi, y)$, donde $\xi = \frac{1}{x}$. Tenemos, de acuerdo con (85) y (54),

$$\xi = \frac{1}{x} = \frac{1}{\mathrm{cl}\,t} = \mathrm{cl}\,(it) \quad \text{e} \quad y = \mathrm{sl}\,t = \frac{1}{i}\,\mathrm{sl}\,(it).$$

Es evidente que ξ e y satisfacen la ecuación que se obtiene de (84') cambiando en ella x por $\frac{1}{\xi}$ y conservando y:

$$\frac{1}{\xi^2} + y^2 + \frac{y^2}{\xi^2} = 1 \quad \text{o} \quad \xi^2 - y^2 - \xi^2y^2 = 1. \tag{84''}$$

Hemos obtenido de nuevo una curva de cuarto grado (está formada por dos ramas infinitas representadas en la fig. 19); las coordenadas de cualquier punto A de la misma se expresan a través

de los valores de las funciones lemniscáticas de argumento imaginario puro it:

$$\xi = \mathrm{cl}\,(it) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{i}\,\mathrm{sl}\,(it).$$

Es fácil descubrir el significado geométrico de t. A saber, de las ecuaciones (84') y (84'') tenemos:

$$x = \frac{1 - y^2}{\sqrt{1 - y^4}} \quad \text{y} \quad \xi = \frac{1 + y^2}{\sqrt{1 - y^4}}$$

(para concretar hemos tomado puntos de abscisas positivas). Por

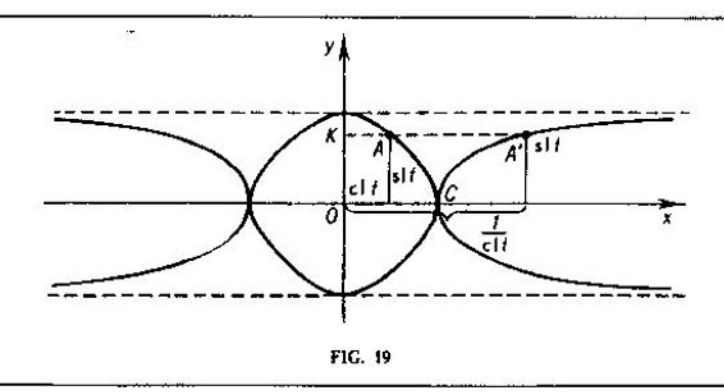


FIG. 19

eso, para las áreas de los trapezoides $OCAK$ y $OCA'K$ obtenemos

$$\text{área } OCAK = \int_0^y x\,dy = \int_0^y \frac{1 - \eta^2}{\sqrt{1 - \eta^4}}\,d\eta,$$

$$\text{área } OCA'K = \int_0^y \xi\,d\eta = \int_0^y \frac{1 + \eta^2}{\sqrt{1 - \eta^4}}\,d\eta,$$

de donde

$$t = \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^4}} = \frac{1}{2}\,[\text{área } OCAK + \text{área } OCA'K].$$

Tal es la interpretación geométrica de t para este modo de representar las funciones lemniscáticas que abarca los casos de parámetro real (t) y de parámetro imaginario puro (it).

Los teoremas de adición permiten expresar los valores de las funciones lemniscáticas para cualquier valor complejo $t = \sigma + i\tau$ a través de estas mismas funciones de variables reales σ y τ. A saber, poniendo $\alpha = \sigma$ y $\beta = i\tau$ en la primera de las expresiones (87) y empleando las fórmulas

$$\operatorname{sl}(i\tau) = i \operatorname{sl}\tau, \tag{54}$$

$$\operatorname{cl}(i\tau) = \frac{1}{\operatorname{cl}\tau}, \tag{85}$$

obtenemos

$$\operatorname{sl}(\sigma + i\tau) = \frac{\operatorname{sl}\sigma(1 - \operatorname{sl}^2\tau) + i\operatorname{sl}\tau\operatorname{cl}\sigma(1 + \operatorname{sl}^2\sigma)}{1 - \operatorname{sl}^2\sigma\operatorname{sl}^2\tau}.$$

Cambiando aquí, según la fórmula (84), $1 - \operatorname{sl}^2\tau$ por $\operatorname{cl}^2\tau(1 + \operatorname{sl}^2\tau)$, obtenemos después de simplificar en $\operatorname{cl}\tau$:

$$\operatorname{sl}(\sigma + i\tau) = \frac{\operatorname{sl}\sigma\operatorname{cl}\tau(1 + \operatorname{sl}^2\tau) + i\operatorname{sl}\tau\operatorname{cl}\sigma(1 + \operatorname{sl}^2\sigma)}{1 - \operatorname{sl}^2\sigma\operatorname{sl}^2\tau}. \tag{89}$$

Análogamente, con $\alpha = \sigma$ y $\beta = i\tau$ la segunda de las expresiones (87) da:

$$\operatorname{sl}(\sigma + i\tau) = \frac{\operatorname{sl}^2\sigma + \operatorname{sl}^2\tau}{\operatorname{sl}\sigma\operatorname{cl}\tau(1 + \operatorname{sl}^2\tau) - i\operatorname{sl}\tau\operatorname{cl}\sigma(1 + \operatorname{sl}^2\sigma)}. \tag{89'}$$

De un modo semejante deducimos de las fórmulas (88) que

$$\operatorname{cl}(\sigma + i\tau) = \frac{\operatorname{cl}\sigma\operatorname{cl}\tau(1 + \operatorname{sl}^2\tau) - i\operatorname{sl}\sigma\operatorname{sl}\tau(1 + \operatorname{cl}^2\sigma)}{1 - \operatorname{cl}^2\sigma\operatorname{sl}^2\tau} =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{sl}^2\sigma\operatorname{cl}^2\tau}{\operatorname{cl}\sigma\operatorname{cl}\tau(1 + \operatorname{sl}^2\sigma) + i\operatorname{sl}\sigma\operatorname{sl}\tau(1 + \operatorname{cl}^2\tau)}. \tag{90}$$

26. Detengámonos también en las fórmulas para las funciones elípticas de Jacobi. Partiendo de la función principal $\operatorname{sn}(t, k)$ se definen otras dos

$$\operatorname{cn}(t, k) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(t, k)}, \quad \operatorname{dn}(t, k) = \sqrt{1 - k^2\operatorname{sn}^2(t, k)}. \tag{91}$$

Aquí se toman los valores de las raíces cuadradas que para $t = 0$ ($\operatorname{sn}(0, k) = 0$) se convierten en 1 y se prolongan después al

plano complejo de modo que quede garantizada la continuidad y diferenciabilidad de las funciones. De esta forma

$$\operatorname{cn}(0, k) = \operatorname{dn}(0, k) = 1.$$

Las relaciones (91) se pueden representar en la forma:

$$\operatorname{sn}^2(t, k) + \operatorname{cn}^2(t, k) = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2(t, k) + \operatorname{dn}^2(t, k) = 1. \quad (91')$$

De las fórmulas (91) se deduce que $\operatorname{cn}(t, k)$ y $\operatorname{dn}(t, k)$ son funciones pares:

$$\operatorname{cn}(-t, k) = \operatorname{cn}(t, k) \quad \text{y} \quad \operatorname{dn}(-t, k) = \operatorname{dn}(t, k). \qquad (92)$$

Las designaciones de las funciones de Jacobi, $\operatorname{sn} t$ y $\operatorname{cn} t$, subrayan la semejanza de las mismas a $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$, respectivamente. Si el módulo $k = 0$, estas funciones se convierten en $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$; la función $\operatorname{dn} t$ degenera en este caso en 1.

En efecto, para $k = 0$ la integral

$$t = \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

se convierte en

$$t = \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}};$$

por eso, la función inversa $w = \operatorname{sn}(t, k)$ se transforma en $w = \operatorname{sen} t$. Las fórmulas (91) dan:

$$\operatorname{cn}(t, 0) = \cos t \quad \text{y} \quad \operatorname{dn}(t, 0) = 1.$$

Empleando (91), la fórmula (55') se puede representar así:

$$\operatorname{sn}(it, k) = i\,\frac{\operatorname{sn}(t, k')}{\operatorname{cn}(t, k')}, \qquad (93)$$

donde $k' = \sqrt{1 - k^2}$ es el módulo complementario (respecto a k). Las fórmulas (91) permiten ahora expresar $\operatorname{cn}(it, k)$ y $\operatorname{dn}(it, k)$ a través de las funciones correspondientes de módulo complementario:

$$\operatorname{cn}(it, k) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(it, k)} = \sqrt{1 + \frac{\operatorname{sn}^2(t, k')}{\operatorname{cn}^2(t, k')}} = \frac{1}{\operatorname{cn}(t, k')}; \qquad (94)$$

$$\operatorname{dn}(it,\ k) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(it,\ k)} = \sqrt{1 + k^2 \frac{\operatorname{sn}^2(t,\ k')}{\operatorname{cn}^2(t,\ k')}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(t,\ k') + (1 - k'^2)\operatorname{sn}^2(t,\ k')}}{\operatorname{cn}(t,\ k')} = \frac{\operatorname{dn}(t,\ k')}{\operatorname{cn}(t,\ k')}. \quad (95)$$

Cambiando en las fórmulas (93), (94) y (95) t por it (y, en consecuencia, it por $-t$), obtenemos:

$$\operatorname{sn}(t,\ k) = -i\,\frac{\operatorname{sn}(it,\ k')}{\operatorname{cn}(it,\ k')},$$

$$\operatorname{cn}(t,\ k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(it,\ k')} \quad \text{y} \quad \operatorname{dn}(t,\ k) = \frac{\operatorname{dn}(it,\ k')}{\operatorname{cn}(it,\ k')}.$$

Observando que para $k = 1$ el módulo complementario k' se convierte en cero, obtenemos mediante las fórmulas (52) y (71):

$$\operatorname{sn}(t,\ 1) = -i\,\frac{\operatorname{sn}(it,\ 0)}{\operatorname{cn}(it,\ 0)} = -i\,\frac{\operatorname{sen}(it)}{\cos(it)} = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t};$$

$$\operatorname{cn}(t,\ 1) = \frac{1}{\operatorname{cn}(it,\ 0)} = \frac{1}{\cos(it)} = \frac{1}{\operatorname{ch} t};$$

$$\operatorname{dn}(t,\ 1) = \frac{\operatorname{dn}(it,\ 0)}{\operatorname{cn}(it,\ 0)} = \frac{1}{\cos(it)} = \frac{1}{\operatorname{ch} t}.$$

Por consiguiente, para $k = 1$ las funciones de Jacobi se transforman en cocientes de funciones hiperbólicas. Las gráficas correspondientes (para valores reales de t) aparecen en la fig. 20. De esta forma, cuando el módulo k varía continuamente desde 0 hasta 1, las funciones de Jacobi $\operatorname{sn}(t,\ k)$, $\operatorname{cn}(t,\ k)$ y $\operatorname{dn}(t,\ k)$ forman como un puente entre las funciones circulares $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ (a las que se agrega también la constante idéntica 1) y las funciones hiperbólicas $\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$, $\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$ y $\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$.

27. Empleando las funciones $\operatorname{cn}(t,\ k)$ y $\operatorname{dn}(t,\ k)$, el teorema de adición (65^{IV}) para $\operatorname{sn}(t,\ k)$ toma la forma:

$$\operatorname{sn}(\alpha + \beta,\ k) =$$

$$= \frac{\operatorname{sn}(\alpha,\ k)\operatorname{cn}(\beta,\ k)\operatorname{dn}(\beta,\ k) + \operatorname{sn}(\beta,\ k)\operatorname{cn}(\alpha,\ k)\operatorname{dn}(\alpha,\ k)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\alpha,\ k)\operatorname{sn}^2(\beta,\ k)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sn}^2(\alpha,\ k) - \operatorname{sn}^2(\beta,\ k)}{\operatorname{sn}(\alpha,\ k)\operatorname{cn}(\beta,\ k)\operatorname{dn}(\beta,\ k) - \operatorname{sn}(\beta,\ k)\operatorname{cn}(\alpha,\ k)\operatorname{dn}(\alpha,\ k)}. \quad (96)$$

Para deducir de (96) los teoremas de adición para $\operatorname{cn}(t, k)$ y $\operatorname{dn}(t, k)$, emplearemos las identidades siguientes cuya validez se comprueba por medio de las fórmulas (91′):

$$(\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\beta \operatorname{dn}\beta + \operatorname{sn}\beta \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha)^2 + (\operatorname{cn}\alpha \operatorname{cn}\beta - \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\beta \operatorname{dn}\alpha \operatorname{dn}\beta)^2 = (\operatorname{dn}\alpha \operatorname{dn}\beta - k^2 \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\beta \operatorname{cn}\alpha \operatorname{cn}\beta)^2 + k^2(\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\beta \operatorname{dn}\beta + \operatorname{sn}\beta \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha)^2 = (1 - k^2 \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{sn}^2\beta)^2.$$

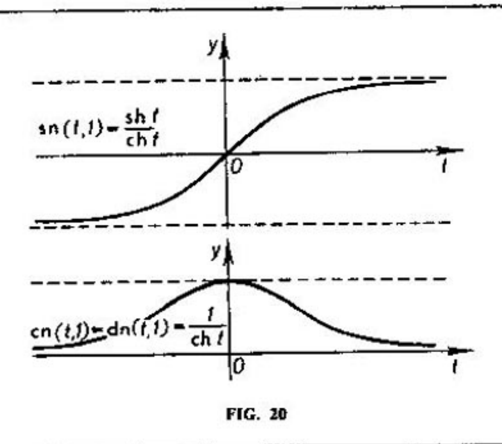


FIG. 20

Obtenemos:

$$\operatorname{cn}(\alpha+\beta, k) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(\alpha+\beta, k)} = \frac{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{sn}^2\beta)^2 - (\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\beta \operatorname{dn}\beta + \operatorname{sn}\beta \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha)^2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{sn}^2\beta} = \frac{\operatorname{cn}\alpha \operatorname{cn}\beta - \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\beta \operatorname{dn}\alpha \operatorname{dn}\beta}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{sn}^2\beta}; \quad (97)$$

$$\operatorname{dn}(\alpha+\beta, k) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\alpha+\beta, k)} = \frac{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{sn}^2\beta)^2 - k^2(\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\beta \operatorname{dn}\beta + \operatorname{sn}\beta \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha)^2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{sn}^2\beta} = \frac{\operatorname{dn}\alpha \operatorname{dn}\beta - k^2 \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\beta \operatorname{cn}\alpha \operatorname{cn}\beta}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{sn}^2\beta}. \quad (98)$$

Los teoremas de adición encontrados permiten expresar los valores de las funciones elípticas de Jacobi para cualquier $t = \sigma + i\tau$ complejo a través de estas mismas funciones de variables reales σ y τ. Para ello habrá que hacer uso también de las fórmulas (93), (94) y (95). La primera de las expresiones (96) da:

$$\operatorname{sn}(\sigma + i\tau, k) =$$

$$= \frac{\operatorname{sn}(\sigma, k)\operatorname{cn}(i\tau, k)\operatorname{dn}(i\tau, k) + \operatorname{sn}(i\tau, k)\operatorname{cn}(\sigma, k)\operatorname{dn}(\sigma, k)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\sigma, k)\operatorname{sn}^2(i\tau, k)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sn}(\sigma, k)\operatorname{dn}(\tau, k') + i\operatorname{sn}(\tau, k')\operatorname{cn}(\tau, k')\operatorname{cn}(\sigma, k)\operatorname{dn}(\sigma, k)}{\operatorname{cn}^2(\tau, k') + k^2\operatorname{sn}^2(\sigma, k)\operatorname{sn}^2(\tau, k')}, \quad (99)$$

donde $k' = \sqrt{1 - k^2}$. La segunda de las expresiones (96) permite representar este mismo resultado en otra forma:

$$\operatorname{sn}(\sigma + i\tau, k) =$$

$$= \frac{\operatorname{sn}^2(\sigma, k)\operatorname{cn}^2(\tau, k') + \operatorname{sn}^2(\tau, k')}{\operatorname{sn}(\sigma, k)\operatorname{dn}(\tau, k') - i\operatorname{sn}(\tau, k')\operatorname{cn}(\tau, k')\operatorname{cn}(\sigma, k)\operatorname{dn}(\sigma, k)} \quad (99')$$

Del mismo modo exactamente encontramos, empleando la fórmula (97), que

$$\operatorname{cn}(\sigma + i\tau, k) =$$

$$= \frac{\operatorname{cn}(\sigma, k)\operatorname{cn}(\tau, k') - i\operatorname{sn}(\sigma, k')\operatorname{sn}(\tau, k')\operatorname{dn}(\sigma, k)\operatorname{dn}(\tau, k')}{\operatorname{cn}^2(\tau, k') + k^2\operatorname{sn}^2(\sigma, k)\operatorname{sn}^2(\tau, k')}. \quad (100)$$

El lector puede comprobar, empleando (91), que este mismo resultado se representa en la forma:

$$\operatorname{cn}(\sigma + i\tau, k) =$$

$$= \frac{\operatorname{cn}^2(\sigma, k) + k'^2\operatorname{sn}^2(\sigma, k)\operatorname{sn}^2(\tau, k')}{\operatorname{cn}(\sigma, k)\operatorname{cn}(\tau, k') + i\operatorname{sn}(\sigma, k)\operatorname{sn}(\tau, k')\operatorname{dn}(\sigma, k)\operatorname{dn}(\tau, k')}. \quad (100')$$

Análogamente, para la función $\operatorname{dn} t$ obtenemos:

$$\operatorname{dn}(\sigma + i\tau, k) =$$

$$= \frac{\operatorname{dn}(\sigma, k)\operatorname{cn}(\tau, k')\operatorname{dn}(\tau, k') - ik^2\operatorname{sn}(\sigma, k)\operatorname{cn}(\sigma, k)\operatorname{sn}(\tau, k')}{\operatorname{cn}^2(\tau, k') + k^2\operatorname{sn}^2(\sigma, k)\operatorname{sn}^2(\tau, k')} =$$

$$= \frac{k^2\operatorname{cn}^2(\sigma, k) + k'^2\operatorname{cn}^2(\tau, k')}{\operatorname{dn}(\sigma, k)\operatorname{cn}(\tau, k')\operatorname{dn}(\tau, k') + ik^2\operatorname{sn}(\sigma, k)\operatorname{cn}(\sigma, k)\operatorname{sn}(\tau, k')}. \quad (101)$$

28. Pongamos

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = K(k) = K, \tag{102}$$

donde la integración se efectúa a lo largo del segmento del eje real que une los puntos 0 y 1 de modo que $K(k)$ es un número real positivo. De (102) se deduce:

$$\operatorname{sn}[K(k), k] = 1; \tag{103}$$

por eso,

$$\operatorname{cn}[K(k), k] = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2[K(k), k]} = 0$$

y

$$\operatorname{dn}[K(k), k] = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2[K(k), k]} = \sqrt{1-k^2} = k'. \tag{104}$$

Omitiendo el módulo k para abreviar las designaciones, pongamos $\alpha = K$ y $\beta = -t$ en las fórmulas (96), (97) y (98). Obtenemos:

$$\operatorname{sn}(K-t) = \frac{\operatorname{sn} K \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t - \operatorname{sn} t \operatorname{cn} K \operatorname{dn} K}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 K \operatorname{sn}^2 t} = \frac{\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t} = \frac{\operatorname{cn} t}{\operatorname{dn} t}; \tag{105}$$

$$\operatorname{cn}(K-t) = \frac{\operatorname{cn} K \operatorname{cn} t + \operatorname{sn} K \operatorname{sn} t \operatorname{dn} K \operatorname{dn} t}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 K \operatorname{sn}^2 t} = \frac{k' \operatorname{sn} t \operatorname{dn} t}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t} = k' \frac{\operatorname{sn} t}{\operatorname{dn} t}; \tag{106}$$

$$\operatorname{dn}(K-t) = \frac{\operatorname{dn} K \operatorname{dn} t + k^2 \operatorname{sn} K \operatorname{sn} t \operatorname{cn} K \operatorname{cn} t}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 K \operatorname{sn}^2 t} = \frac{k' \operatorname{dn} t}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t} = \frac{k'}{\operatorname{dn} t}. \tag{107}$$

Cambiando aquí t por $-t$, encontraremos:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(K+t) &= \frac{\operatorname{cn} t}{\operatorname{dn} t} = \operatorname{sn}(K-t); \\ \operatorname{cn}(K+t) &= -k' \frac{\operatorname{sn} t}{\operatorname{dn} t} = -\operatorname{cn}(K-t); \\ \operatorname{dn}(K+t) &= \frac{k'}{\operatorname{dn} t} = \operatorname{dn}(K-t). \end{aligned}\right\} \quad (108)$$

En la teoría de las funciones elípticas de Jacobi, las fórmulas de (105) a (108) desempeñan un papel semejante al que desempeñan las «fórmulas de reducción» en la Trigonometría.

Si en las fórmulas (108) cambiamos t por $t + K$, encontraremos otras «fórmulas de reducción»:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(t+2K) &= -\operatorname{sn} t, \\ \operatorname{cn}(t+2K) &= -\operatorname{cn} t, \\ \operatorname{dn}(t+2K) &= \operatorname{dn} t. \end{aligned}\right\} \quad (109)$$

De la última fórmula se deduce que $\operatorname{dn} t$ es una función periódica de período $2K$. Finalmente, cambiando t por $t + 2K$ en las dos primeras fórmulas (109), obtenemos:

$$\operatorname{sn}(t+4K) = \operatorname{sn} t \quad \text{y} \quad \operatorname{cn}(t+4K) = \operatorname{cn} t. \quad (110)$$

Por consiguiente, $\operatorname{sn} t$ y $\operatorname{cn} t$ también son funciones periódicas de período $4K$.

29. Las fórmulas del punto anterior permiten, sin realizar cálculos adicionales, explicar plenamente el comportamiento de las funciones de Jacobi de variable real. Comencemos por la función $y = \operatorname{sn}(t, k)$ $(0 < k < 1)$. De su definición como función inversa de la integral $t = \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)}}$, se deduce que crece monótonamente de 0 a 1 cuando t aumenta desde 0 hasta $K(k) = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)}}$ (compárese con el punto 11). La primera

de las fórmulas (108) muestra que la gráfica de $y = \operatorname{sn}(t, k)$ es simétrica respecto a la recta $t = K$ y, por consiguiente, tiene la forma de una semionda en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 2K$ (fig. 21, *a*). Después, la primera de las fórmulas (109) da, al cambiar t por $-t$,

$$\operatorname{sn}(2K - t) = -\operatorname{sn}(-t) = \operatorname{sn} t.$$

Comparando $\operatorname{sn}(2K + t)$ y $\operatorname{sn}(2K - t)$, obtenemos:

$$\operatorname{sn}(2K + t) = -\operatorname{sn}(2K - t).$$

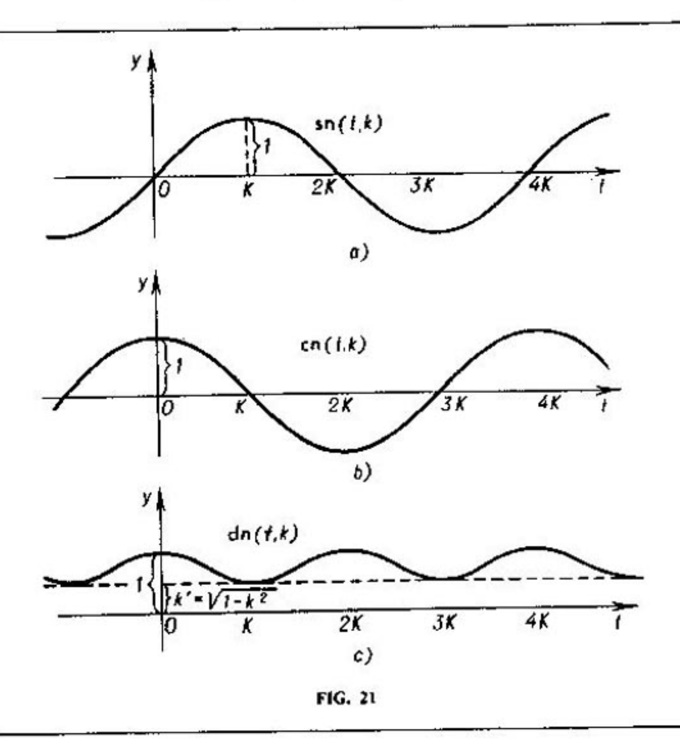


FIG. 21

Esto significa que la gráfica de $y = \operatorname{sn}(t, k)$ es simétrica respecto al punto $(2K, 0)$ y, por consiguiente, tiene en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 4K$ la misma forma que la onda de la sinusoide en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (fig. 21, *a*). Después de esto, la gráfica se traza basándose en la periodicidad de $\operatorname{sn}(t, k)$ (el período es igual a $4K$).

Para determinar el carácter de la gráfica de la función $y = \operatorname{cn}(t, k)$ se puede partir de la relación $\operatorname{cn}(t, k) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(t, k)}$, de donde

se deduce que esta función decrece monotonamente en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant K$ desde 1 hasta 0. Después de esto, la gráfica se obtiene de la misma forma que antes empleando las fórmulas (108), (109) y (110). Obtenemos que esta gráfica tiene la forma de la cosinusoide (fig. 21, *b*).

Análogamente obtenemos la forma de la gráfica de la función $y = \mathrm{dn}(t, k)$. La fórmula $\mathrm{dn}(t, k) = \sqrt{1 - k^2 \mathrm{sn}^2(t, k)}$ muestra primero que esta función decrece en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant K$ desde 1 hasta $\sqrt{1 - k^2} = k'$. La prolongación de la gráfica en todo el eje numérico se obtiene empleando las respectivas relaciones (108) y (109). La gráfica obtenida aparece en la fig. 21, *c*.

Del análisis realizado se deduce que todos los ceros reales de $\mathrm{sn}(t, k)$ (o sea, las raíces reales de la ecuación $\mathrm{sn}(t, k) = 0$) se reducen a los puntos $t = 2mK(k)$, donde m es un número entero cualquiera.

Análogamente, los ceros reales de $\mathrm{cn}(t, k)$ son de la forma

$$t = (2m - 1)\, K(k).$$

En cuanto a la función $\mathrm{dn}(t, k)$, no tiene en absoluto ceros reales (si $0 < k < 1$).

30. Mostremos que el seno generalizado $s(t)$ puede ser expresado en todos los casos a través de las funciónes $\mathrm{sen}\, t$, $\mathrm{sh}\, t$ o las funciones de Jacobi. A saber, si $n = 0$ (n es el coeficiente de z^4 en la expresión $1 + mz^2 + nz^4$), se expresa a través de $\mathrm{sen}\, t$ o $\mathrm{sh}\, t$, y si $n \neq 0$, a través de las funciones de Jacobi.

Si $n = 0$ y $m \neq 0$, entonces $1 + mz^2$ se puede representar en la forma $1 \pm \lambda^2 z^2$, donde $\lambda > 0$. Representando en este caso la relación $w = s(t)$ en la forma

$$t = \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1 \pm \lambda^2 z^2}},$$

realicemos el siguiente cambio de la variable de integración: $\zeta = \lambda z$. Obtendremos:

$$t = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda w} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 \pm \zeta^2}},$$

de donde $\lambda w = \mathrm{sen}(\lambda t)$ o bien $\lambda w = \mathrm{sh}(\lambda t)$. De modo que en el

caso considerado

$$s(t) = \frac{1}{\lambda}\,\text{sen}\,(\lambda t) \quad \text{o} \quad s(t) = \frac{1}{\lambda}\,\text{sh}\,(\lambda t). \tag{111}$$

Sea ahora $n \neq 0$ y, como siempre, $m^2 - 4n \neq 0$. Consideremos los dos casos principales:

$$\text{I. } m^2 - 4n > 0; \quad \text{II. } m^2 - 4n < 0.$$

I. $m^2 - 4n > 0$; las raíces x_1 y x_2 de la ecuación

$$x^2 + mx + n = 0$$

son reales y distintas. Tenemos: $x^2 + mx + n = (x - x_1)(x - x_2)$ o, cambiando x por $\frac{1}{z^2}$: $1 + mz^2 + nz^4 = (1 - x_1 z^2)(1 - x_2 z^2)$.

Aquí hay que distinguir, a su vez, tres casos:

a) x_1 y x_2 son positivos; b) x_1 y x_2 tienen signos distintos y c) x_1 y x_2 son negativos.

En el caso a) podemos poner que x_1 y x_2 tienen los valores λ^2 y μ^2, donde $\lambda > \mu > 0$. Entonces

$$1 + mz^2 + nz^4 = (1 - \lambda^2 z^2)(1 - \mu^2 z^2),$$

y, por consiguiente, la relación $w = s(t)$ toma la forma:

$$t = \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{(1 - \lambda^2 z^2)(1 - \mu^2 z^2)}}.$$

Realizando la sustitución $\zeta = \lambda z$ de la variable, obtendremos

$$t = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda w} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}}, \text{ donde } 0 < k = \frac{\mu}{\lambda} < 1.$$

De modo que en el caso a)

$$w = s(t) = \frac{1}{\lambda}\,\text{sn}\,(\lambda t,\ k). \tag{112}$$

En el caso b) los valores de x_1 y x_2 se pueden representar en la forma λ^2 y $-\mu^2$, donde $\lambda > 0$ y $\mu > 0$. Obtenemos la

siguiente descomposición en factores:

$$1 + mz^2 + nz^4 = (1 - x_1 z^2)(1 - x_2 z^2) = (1 - \lambda^2 z^2)(1 + \mu^2 z^2).$$

Realizando en la integral

$$t = \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{(1 - \lambda^2 z^2)(1 + \mu^2 z^2)}}$$

la sustitución $\zeta = \sqrt{1 - \lambda^2 z^2}$, encontraremos:

$$t = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \int_1^{\sqrt{1 - \lambda^2 w^2}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2 \zeta^2)}},$$

donde

$$0 < k = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} < 1.$$

Poniendo

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2 \zeta^2)}} = K,$$

obtenemos en el caso b):

$$K - \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\, t = \int_0^{\sqrt{1 - \lambda^2 w^2}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2 \zeta^2)}}$$

o

$$\sqrt{1 - \lambda^2 w^2} = \operatorname{sn}(K - \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\, t,\ k) = \frac{\operatorname{cn}(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\, t,\ k)}{\operatorname{dn}(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\, t,\ k)}$$

(véase (105)), de donde

$$w = s(t) = \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{\operatorname{cn}^2(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\, t,\ k)}{\operatorname{dn}^2(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\, t,\ k)}} = \frac{k'}{\lambda} \frac{\operatorname{sn}(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\, t,\ k)}{\operatorname{dn}(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\, t,\ k)}.$$

Observando que en este caso

$$k' = \sqrt{1-k^2} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}},$$

podemos escribir el último resultado en la forma:

$$w = s(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \frac{\operatorname{sn}(\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\, t,\ k)}{\operatorname{dn}(\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\, t,\ k)}. \qquad (113)$$

Para $\lambda = \mu = 1$ la integral

$$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{(1-\lambda^2 z^2)(1+\mu^2 z^2)}}$$

coincide con

$$\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}};$$

por eso, $s(t) = \operatorname{sl} t$ y obtenemos:

$$\operatorname{sl} t = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{sn}\left(\sqrt{2}\, t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\operatorname{dn}\left(\sqrt{2}\, t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}. \qquad (113')$$

Para $\operatorname{cl} t$ encontramos:

$$\operatorname{cl} t = \sqrt{\frac{1-\operatorname{sl}^2 t}{1+\operatorname{sl}^2 t}} = \sqrt{\frac{\operatorname{dn}^2\left(\sqrt{2}\, t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sn}^2\left(\sqrt{2}\, t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\operatorname{dn}^2\left(\sqrt{2}\, t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sn}^2\left(\sqrt{2}\, t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}} =$$

$$= \operatorname{cn}\left(\sqrt{2}\, t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \qquad (113'')$$

De modo que las *funciones lemniscáticas se expresan a través de las funciones de módulo* $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

En el caso c), en el que x_1 y x_2 son negativos, sus valores se pueden representar en la forma $-\lambda^2$ y $-\mu^2$, donde se puede aceptar que $\lambda > \mu > 0$. Por eso,

$$1 + mz^2 + nz^4 = (1 - x_1 z^2)(1 - x_2 z^2) = (1 + \lambda^2 z^2)(1 + \mu^2 z^2).$$

Realicemos en la integral

$$t = \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{(1 + \lambda^2 z^2)(1 + \mu^2 z^2)}}$$

la sustitución de variable $\zeta = \dfrac{\lambda z}{\sqrt{1 + \lambda^2 z^2}}$ (compárese con los cálculos del punto 17, donde $\lambda = 1$ y $\mu = k$); obtendremos:

$$t = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\frac{\lambda w}{\sqrt{1 + \lambda^2 w^2}}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2 \zeta^2)}}, \text{ donde } 0 < k = \frac{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}}{\lambda} < 1.$$

De aquí

$$\frac{\lambda w}{\sqrt{1 + \lambda^2 w^2}} = \operatorname{sn}(\lambda t,\ k)$$

o

$$w = s(t) = \frac{1}{\lambda} \frac{\operatorname{sn}(\lambda t,\ k)}{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(\lambda t,\ k)}} = \frac{1}{\lambda} \frac{\operatorname{sn}(\lambda t,\ k)}{\operatorname{cn}(\lambda t,\ k)}. \qquad (114)$$

Resta considerar el último caso.

II. $m^2 - 4n < 0$ (obviamente aquí $n > 0$). Puesto que las raíces x_1 y x_2 de la ecuación

$$x^2 + mx + n = 0$$

son imaginarias, las raíces de la ecuación

$$\xi^4 + m\xi^2 + n = 0,$$

ligadas a las anteriores por las relaciones

$$\xi_1^2 = \xi_2^2 = x_1 \quad \text{y} \quad \xi_3^2 = \xi_4^2 = x_2,$$

también son imaginarias y, además, sus partes reales son distintas de cero (de lo contrario, los cuadrados de estas raíces serían

números reales). Observando que ξ_1, ξ_2, ξ_3 y ξ_4 también deben ser conjugados dos a dos y cambiando en caso de necesidad la numeración de los mismos, tendremos:

$$\xi_1 = -\xi_2 = \alpha + i\beta, \quad \xi_3 = -\xi_4 = \alpha - i\beta \quad (\alpha > 0, \quad \beta > 0).$$

Cambiando ξ por $\frac{1}{z}$ en la descomposición

$$\xi^4 + m\xi^2 + n = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)$$

obtendremos la siguiente descomposición en factores:

$$1 + mz^2 + nz^4 =$$
$$= [1 + (\alpha + i\beta)z][1 + (\alpha - i\beta)z][1 - (\alpha + i\beta)z][1 - (\alpha - i\beta)z] =$$
$$= [1 + 2\alpha z + (\alpha^2 + \beta^2)z^2][1 - 2\alpha z + (\alpha^2 + \beta^2)z^2];$$

es obvio que $\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{n}$ (de donde $0 < \alpha < \sqrt[4]{n}$). Por consiguiente, nuestra integral tiene la forma

$$t = \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{(1 + 2\alpha z + \sqrt{n}z^2)(1 - 2\alpha z + \sqrt{n}z^2)}}.$$

Comprobemos mediante la sustitución $z = \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \cdot \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$ que se reduce a uno de los casos considerados anteriormente. En efecto, realizando la sustitución, obtendremos

$$t = \int_1^{\frac{1+\sqrt[4]{n}w}{1-\sqrt[4]{n}w}} \frac{d\zeta}{\sqrt{[(\sqrt[4]{n} - \alpha) + (\sqrt[4]{n} + \alpha)\zeta^2][(\sqrt[4]{n} + \alpha) + (\sqrt[4]{n} - \alpha)\zeta^2]}} =$$

$$= \frac{1}{\beta} \int_1^{\frac{1+\sqrt[4]{n}w}{1-\sqrt[4]{n}w}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 + \lambda^2\zeta^2)(1 + \mu^2\zeta^2)}},$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sqrt[4]{n} + \alpha}{\sqrt[4]{n} - \alpha}} > \mu = \sqrt{\frac{\sqrt[4]{n} - \alpha}{\sqrt[4]{n} + \alpha}} > 0.$$

Pongamos

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1+\lambda^2\zeta^2)(1+\mu^2\zeta^2)}} = A;$$

entonces

$$\beta t + A = \int_0^{\frac{1+\sqrt[4]{n}w}{1-\sqrt[4]{n}w}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1+\lambda^2\zeta^2)(1+\mu^2\zeta^2)}}.$$

Hemos llegado al caso 1 c). Por eso, según la fórmula (114):

$$\frac{1+\sqrt[4]{n}\,w}{1-\sqrt[4]{n}\,w} = \frac{1}{\lambda}\,\frac{\operatorname{sn}(\beta t + A,\ k)}{\operatorname{cn}(\beta t + A,\ k)},$$

donde

$$k = \frac{\sqrt{\lambda^2-\mu^2}}{\lambda},$$

y de aquí finalmente

$$w = s(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\cdot\frac{\operatorname{sn}(\beta t + A,\ k) - \lambda\operatorname{cn}(\beta t + A,\ k)}{\operatorname{sn}(\beta t + A,\ k) + \lambda\operatorname{cn}(\beta t + A,\ k)}.$$

Hemos comprobado, pues, en este punto que el seno generalizado se expresa para $n \neq 0$ a través de las funciones de Jacobi de módulo correspondiente k y para $n = 0$, a través de los senos circular e hiperbólico. Todo esto nos concede el derecho de limitarnos en lo sucesivo al estudio de tres senos (y sus cosenos correspondientes) solamente: el circular, el hiperbólico y el de Jacobi (seno de amplitud). Sin embargo, además de éstos, consideraremos también las funciones lemniscáticas ya que en este caso particular se manifiestan con mayor claridad las propiedades de las funciones de Jacobi.

CAPÍTULO VI

CEROS Y POLOS. PERIODICIDAD SIMPLE Y DOBLE. NOCIÓN DE FUNCIÓN ELÍPTICA

31. La comparación de las fórmulas (75), obtenidas anteriormente para las funciones circulares e hiperbólicas, con las fórmulas (89), (89′) y (90) para las funciones lemniscáticas, así como con las fórmulas (99), (100) y (101) para las funciones de Jacobi, pone de manifiesto la diferencia substancial entre unas y otras. A saber, las funciones circulares e hiperbólicas se representan mediante expresiones *enteras* respecto a $\operatorname{sen}\sigma$, $\cos\sigma$, $\operatorname{sh}\tau$ y $\operatorname{ch}\tau$, mientras que las funciones lemniscáticas y de Jacobi son *fraccionales* respecto a $\operatorname{sl}\sigma$, $\operatorname{cl}\sigma$, $\operatorname{sl}\tau$ y $\operatorname{cl}\tau$ las primeras y respecto a las funciones de Jacobi de variables reales σ y τ, las segundas.

Debido a ello, las funciones $\operatorname{sen} t$, $\cos t$, $\operatorname{sh} t$ y $\operatorname{ch} t$ están definidas y toman valores finitos para cualquier valor complejo de t; en cambio las funciones $\operatorname{sl} t$, $\operatorname{cl} t$, $\operatorname{sn}(t, k)$, $\operatorname{cn}(t, k)$ y $\operatorname{dn}(t, k)$ no están definidas para aquellos valores de t en los que se anulan los denominadores de las fracciones.

Consideremos más de cerca esta circunstancia y comencemos por $\operatorname{sl} t$. El denominador de la fracción en la fórmula (89) es igual a $1 - \operatorname{sl}^2\sigma \cdot \operatorname{sl}^2\tau$; se anula cuando, y sólo cuando,

$$\operatorname{sl}\sigma \cdot \operatorname{sl}\tau = \pm 1. \tag{115}$$

Pero $\operatorname{sl}\sigma$ y $\operatorname{sl}\tau$ son números reales que no pasan de 1 por su valor absoluto (recordemos del punto 5 que $\operatorname{sl}\sigma$ es la longitud de una cuerda de la lemniscata, tomada con un signo determinado). Por eso, (115) equivale a dos relaciones:

$$\operatorname{sl}\sigma = \pm 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sl}\tau = \pm 1. \tag{116}$$

De esa misma representación geométrica de $\operatorname{sl}\sigma$ se deduce que $\operatorname{sl}\sigma = 1$ equivale a la condición: $\sigma = \frac{\omega}{2} + 2m\omega$, donde m es un numero entero cualquiera (2ω es el período de $\operatorname{sl}\sigma$). Puesto que $\operatorname{sl}\sigma$ es función impar, la condición $\operatorname{sl}\sigma = -1$ equivale a la condición $\sigma = -\frac{\omega}{2} + 2m\omega$. Luego, el denominador de la fracción (89) se

anula en todos los puntos de coordenadas

$$\sigma = \pm \frac{\omega}{2} + 2m\omega, \quad \tau = \pm \frac{\omega}{2} + 2n\omega$$

$$(m = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots; \quad n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots)$$

y sólo en estos puntos.

Los correspondientes números complejos $t = \sigma + i\tau$ quedan recogidos en la fórmula:

$$t = (4m \pm 1)\frac{\omega}{2} + (4n \pm 1)\frac{\omega i}{2}.$$

Pero si m recorre todos los números enteros $0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ldots$, entonces $4m \pm 1$ recorre todos los números impares $\pm 1, \ \pm 3, \ \pm 5, \ldots$

Por eso, los valores encontrados de t se pueden representar definitivamente en la forma:

$$t = (2p - 1)\frac{\omega}{2} + (2q - 1)\frac{\omega i}{2}, \tag{117}$$

donde $p = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots; \ q = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots$

Consideremos cualquiera de estos puntos.

Si $\sigma = (2p - 1)\frac{\omega}{2}$, entonces $\operatorname{sl} \sigma = (-1)^{p-1}$ como se deduce fácilmente de las consideraciones anteriores; por eso, $\operatorname{sl}^2 \sigma = 1$ y la fórmula (83) da $\operatorname{cl} \sigma = 0$. Análogamente, para $\tau = (2q - 1)\frac{\omega}{2}$ tenemos $\operatorname{sl} \tau = (-1)^{q-1}$ y $\operatorname{cl} \tau = 0$. Si introducimos estos valores en el segundo miembro de la fórmula (89), es evidente que no sólo el denominador sino también el numerador se anula y no podemos directamente decir nada acerca del comportamiento de $\operatorname{sl} t$ cuando $t \to (2p - 1)\frac{\omega}{2} + (2q - 1)\frac{\omega i}{2}$. La fórmula (89') permite salir de la situación. Aquí el denominador de la fracción sigue siendo igual a cero, pero el numerador $\operatorname{sl}^2 \sigma + \operatorname{sl}^2 \tau = 2$ es distinto de cero. De aquí se deduce que $\operatorname{sl} t$ tiende hacia ∞ cuando $t \to (2p - 1)\frac{\omega}{2} + (2q - 1)\frac{\omega i}{2}$ (aquí nos basamos en la continuidad de las funciones lemniscáticas de variable real). Ahora podemos completar la definición de $\operatorname{sl} t$ poniendo

$$\operatorname{sl}\left[(2p - 1)\frac{\omega}{2} + (2q - 1)\frac{\omega i}{2}\right] = \infty,$$

$$p = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots; \quad q = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots \tag{118}$$

Si se denomina *polo de una función* al punto del plano complejo en el que la función se convierte en ∞ (es decir, la función tiende a ∞ cuando la variable tiende hacia este punto), podemos decir ahora que la fórmula (118) determina todo el conjunto infinito de los polos del seno lemniscático.

Análogamente, de las fórmulas (90) se podrían determinar todos los polos del coseno lemniscático. Pero es más sencillo partir de la fórmula (82):

$$\operatorname{cl} t = \operatorname{sl}\left(\frac{\omega}{2} - t\right)$$

De ella se deduce que $\operatorname{cl} t$ tiende a ∞ si t tiende hacia un punto a cuando, y sólo cuando, $\operatorname{sl}\left(\frac{\omega}{2} - t\right)$ tiende hacia ∞ si $\frac{\omega}{2} - t$ tiende hacia $\frac{\omega}{2} - a$. De aquí, según lo expuesto anteriormente,

$$\frac{\omega}{2} - a = (2p - 1)\frac{\omega}{2} + (2q - 1)\frac{\omega i}{2},$$

es decir,

$$a = 2(-p + 1)\frac{\omega}{2} + [2(-q + 1) - 1]\frac{\omega i}{2}.$$

Cambiando aquí $-p + 1$ por p' y $-q + 1$ por q', obtenemos que todos los polos de $\operatorname{cl} t$ se representan en la forma

$$t = p'\omega + (2q' - 1)\frac{\omega i}{2}, \tag{119}$$

donde p' y q' son números enteros cualesquiera.

32. De un modo análogo se determinan los polos de las funciones de Jacobi. Comencemos por $\operatorname{sn}(t, k)$ $(0 < k < 1)$. El denominador de la fórmula (99) tiene la forma

$$\operatorname{cn}^2(\tau, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(\sigma, k) \operatorname{sn}^2(\tau, k'). \tag{120}$$

Puesto que para σ y τ reales también son reales los valores de las funciones de Jacobi, la condición de anulación de esta suma equivale a dos condiciones:

$$\operatorname{cn}(\tau, k') = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sn}(\sigma, k)\operatorname{sn}(\tau, k') = 0.$$

Pero si $\operatorname{cn}(\tau, k') = 0$, entonces $\operatorname{sn}(\tau, k') = \pm 1$ (véase (91)). Por eso, obtenemos que (120) se anula cuando, y sólo cuando, simultáneamente

$$\operatorname{cn}(\tau, k') = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sn}(\sigma, k) = 0. \qquad (121)$$

Según el punto 29, de aquí se deduce que

$$\sigma = 2mK(k) \quad \text{y} \quad \tau = (2n - 1) K(k'),$$

es decir,

$$t = 2mK(k) + i(2n - 1) K(k').$$

Designando $K(k)$ por K y $K(k')$ por K', escribamos los valores encontrados en la forma:

$$t = 2mK + i(2n - 1) K', \qquad (122)$$

donde m y n son números enteros cualesquiera.

Pero si introducimos en la fórmula (99) los valores encontrados de σ y τ, veremos que se anula no tan sólo el denominador sino también el numerador (ya que $\operatorname{sn}(\sigma, k) = \operatorname{cn}(\tau, k') = 0$). Por ello, esta fórmula no permite juzgar directamente acerca del comportamiento de $\operatorname{sn}(t, k)$ cuando $t \to 2mK + i(2n - 1) iK'$. Viene en ayuda la fórmula (99'). Como para $\operatorname{cn}(\tau, k') = 0$ el valor $\operatorname{sn}(\tau, k') = \pm 1$ (la primera de las fórmulas (91)), se tiene $\operatorname{sn}^2(\tau, k') = 1$ y la fórmula (99') muestra que $\operatorname{sn}(t, k) \to \infty$ cuando t tiende hacia cualquiera de los puntos (122). Por consiguiente, los valores encontrados para t representan polos (y, además, todos los polos posibles) de la función de Jacobi $\operatorname{sn}(t, k)$.

De un modo análogo es posible persuadirse de que los valores (122) dan así mismo todos los polos de las funciones $\operatorname{cn}(t, k)$ y $\operatorname{dn}(t, k)$. Es verdad que este resultado sobre la coincidencia de los polos de estas funciones con los polos de $\operatorname{sn}(t, k)$ se desprende de las identidades (91).

33. Para lo sucesivo es necesario conocer también los ceros de las funciones que estamos estudiando, o sea, todos aquellos puntos del plano complejo en los que se anulan las funciones. Comencemos por el seno circular. Según la primera de las fórmulas (75),

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(\sigma + i\tau) = \operatorname{sen}\sigma \operatorname{ch}\tau + i \operatorname{sh}\tau \cos\sigma. \qquad (75')$$

De aquí se deduce que la ecuación

$$\operatorname{sen} t = 0 \qquad (123)$$

equivale al sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\sigma\cdot\operatorname{ch}\tau=0,\\ \operatorname{sh}\tau\cdot\cos\sigma=0.\end{aligned}\right\} \qquad (124)$$

Consideremos la primera ecuación (124). Puesto que $\operatorname{ch}\tau \neq 0$ (recordemos la representación geométrica de $\operatorname{ch}\tau$ (punto 2); a este mismo resultado conduce también la fórmula (32): $\operatorname{ch} t = \left.= \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)$, deducimos que $\operatorname{sen}\sigma = 0$. Luego, $\sigma = m\pi$, donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, y por consiguiente, $\cos\sigma = (-1)^m \neq 0$. La segunda de las ecuaciones (124) da: $\operatorname{sh}\tau = 0$, de donde $\tau = 0$ (recordemos la representación geométrica de $\operatorname{sh}\tau$ (punto 2); al mismo resultado conduce la fórmula (31)). De este modo

$$t = \sigma + i\tau = m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (125)$$

Esta expresión comprende todos los ceros de $\operatorname{sen} t$. Vemos que entre ellos no hay puntos imaginarios: al extender la definición del seno circular al plano complejo no aparecen ceros nuevos.

Proponemos al lector, a título de ejercicio, comprobar mediante la segunda de las fórmulas (75) que todos los ceros de $\cos t$ quedan comprendidos en la expresión:

$$t = \sigma + i\tau = (2m - 1)\frac{\pi}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (126)$$

Desde luego, por esta misma vía se pueden hallar los ceros de las funciones hiperbólicas. Pero es más sencillo partir de las relaciones:

$$\operatorname{sen}(it) = i \operatorname{sh} t \quad \text{y} \quad \cos(it) = \operatorname{ch} t.$$

De la primera se deduce que la ecuación $\operatorname{sh} t = 0$ equivale a la ecuación $\operatorname{sen}(it) = 0$. Por eso, $it = m\pi$, de donde

$$t = (-m)\pi i = n\pi i,$$

donde n es de nuevo un número entero cualquiera. Del mismo modo exactamente obtenemos que todos los ceros de $\operatorname{ch} t$ están comprendidos en la fórmula:

$$t = (2n - 1)\frac{\pi i}{2},$$

donde n es un número entero cualquiera.

34. Determinemos los ceros del seno lemniscático.

Empleando la fórmula (89'), deducimos que $\mathrm{sl}\, t = \mathrm{sl}\,(\sigma + i\tau) = 0$ implica $\mathrm{sl}^2\,\sigma + \mathrm{sl}^2\,\tau = 0$, o sea, obtenemos dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{sl}\,\sigma &= 0,\\ \mathrm{sl}\,\tau &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{127}$$

De aquí $\sigma = m\omega$, $\tau = n\omega$ (m y n son números enteros cualesquiera) y, por consiguiente,

$$t = m\omega + n\omega i, \quad m = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots; \quad n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots \tag{128}$$

Pero el denominador de la fracción (89') se anula para $\mathrm{sl}\,\sigma = 0$ y $\mathrm{sl}\,\tau = 0$; por ello la fórmula (89') no permite juzgar sobre los valores de $\mathrm{sl}\, t$ en los puntos hallados. Consideremos la fórmula (89) para $\mathrm{sl}\,(\sigma + i\tau)$; aquí el numerador de la fracción, dadas las condiciones (127), es igual a cero y el denominador es igual a 1. Por lo tanto $\mathrm{sl}\,(m\omega + n\omega i) = 0$ y, en consecuencia, la fórmula (128) representa efectivamente ceros de $\mathrm{sl}\, t$ (además, todos los ceros ya que de la fórmula (89') se deduce que las condiciones halladas son necesarias para la anulación de $\mathrm{sl}\, t$).

Para encontrar los ceros de $\mathrm{cl}\, t$, lo más sencillo es partir de la fórmula (82):

$$\mathrm{cl}\, t = \mathrm{sl}\left(\frac{\omega}{2} - t\right).$$

De ella se deduce que la ecuación $\mathrm{cl}\, t = 0$ equivale a la ecuación $\mathrm{sl}\left(\frac{\omega}{2} - t\right) = 0$. Por eso $\frac{\omega}{2} - t = m\omega + n\omega i$, de donde

$$t = [2(-m + 1) - 1]\,\frac{\omega}{2} + (-n)\,\omega i = (2m' - 1)\,\frac{\omega}{2} + n'\omega i, \tag{129}$$

donde m' y n' son números enteros cualesquiera. La fórmula (129) comprende todos los ceros de $\mathrm{cl}\, t$.

35. Para hallar los ceros de $\mathrm{sn}\,(t, k)$ es cómoda la fórmula (99'). De ella se deduce que para la anulación de $\mathrm{sn}\,(\sigma + i\tau,\ k)$ es necesaria la condición: $\mathrm{sn}^2\,(\sigma,\ k)\,\mathrm{cn}^2\,(\sigma,\ k') + \mathrm{sn}^2\,(\tau,\ k') = 0$, o sea, dos ecuaciones:

$$\mathrm{sn}\,(\sigma,\ k)\,\mathrm{cn}\,(\tau,\ k')) = 0,$$

$$\mathrm{sn}\,(\tau,\ k') = 0.$$

Pero de la última ecuación, por medio de (91), se deduce que $\mathrm{cn}\,(\tau, k') = \pm 1 \neq 0$; por eso, las condiciones necesarias de anulación

de $\operatorname{sn}(\sigma + i\tau)$ toman la forma:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(\sigma,\ k) = 0, \\ \operatorname{sn}(\tau,\ k') = 0. \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

De aquí (véase el punto 29):

$$\sigma = 2mK(k) \quad \text{y} \quad \tau = 2nK(k'),$$

o sea,

$$t = 2mK + 2niK', \tag{131}$$

donde m y n son números enteros cualesquiera.

Sin embargo, la fórmula (99') no sirve para calcular $\operatorname{sn}(t,\ k)$ en los puntos encontrados ya que, dadas las condiciones (130), se anula no sólo el numerador sino también el denominador de la fracción que representa $\operatorname{sn}(t,\ k)$. Por eso consideramos la fórmula (99). Aquí el numerador es igual a cero, pero el denominador es distinto de cero (recordemos que $\operatorname{cn}(\tau,\ k') = \pm 1$). De modo que la fórmula (131) representa ceros de $\operatorname{sn}(t,\ k)$ (y, además, todos los ceros).

Empleando las fórmulas (100') y (100) el lector comprobará que

$$t = (2m - 1)K + 2niK' \tag{132}$$

da todos los ceros de $\operatorname{cn}(t,\ k)$, y empleando (101), que

$$t = (2m - 1)K + (2n - 1)iK' \tag{133}$$

da todos los ceros de $\operatorname{dn}(t,\ k)$ (m y n toman aquí todos los valores enteros posibles).

36. Al hablar de la periodicidad de las funciones consideradas, hemos sobreentendido hasta el momento sólo los períodos reales de las mismas. Pero cuando la definición de funciones se hace extensiva a la variable compleja, pueden surgir también períodos imaginarios. Un ejemplo de esta índole es la función exponencial.

A saber, la función exponencial e^t (que no tiene período si se considera como función de variable real) resulta que tiene un periodo imaginario puro $2\pi i$. En efecto, sea $t = \sigma + \tau i$, donde σ y τ son números reales. Entonces, según la fórmula (77),

$$e^t = e^{\sigma + i\tau} = e^\sigma (\cos\tau + i \operatorname{sen}\tau).$$

Cambiemos t por $t + 2\pi i$; como $t + 2\pi i = \sigma + (\tau + 2\pi)i$, esto equivale a cambiar τ por $\tau + 2\pi$. Obtenemos:

$$e^{t + 2\pi i} = e^{\sigma + (\tau + 2\pi)i} = e^\sigma [\cos(\tau + 2\pi) + i \operatorname{sen}(\tau + 2\pi)] =$$

$$= e^\sigma (\cos\tau + i \operatorname{sen}\tau) = e^t \text{ (para cualquier } t).$$

De aquí se deduce que $2\pi i$ es un período de la función e^t.

Recordemos que el número A se denomina *período* de una función $f(t)$ si la igualdad

$$f(t + A) = f(t)$$

se cumple para cualquier t (para el cual está definida la función).

Si $f(t)$ tiene al menos un período distinto de cero, se denomina *función periódica*. De la definición se deduce que si A es un período de $f(t)$, entonces cualquier múltiplo entero de A también es período de $f(t)$.

En el punto 22 se ha demostrado que 2π es un período de la función $\operatorname{sen} t$ considerada como función de veriable compleja. Por consiguiente, cualquier múltiplo entero de 2π es también un período de esta función. Demostremos que es válida así mismo la proposición recíproca: cualquier período de $\operatorname{sen} t$ es un múltiplo entero de 2π. En efecto, sea A un período de $\operatorname{sen} t$. De la identidad

$$\operatorname{sen}(t + A) = \operatorname{sen} t$$

obtenemos para $t = 0$:

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} 0 = 0.$$

Por consiguiente, A es un cero del seno circular; según la fórmula (125), A debe ser igual a un múltiplo de π: $A = m\pi$. Indiquemos por k el resto que se obtiene al dividir m por 2; entonces $m = 2p + k$, donde p es un entero y k es igual a 0 o bien a 1.

Por eso,

$$\operatorname{sen}(t + A) = \operatorname{sen}(t + k\pi + 2p\pi) = \operatorname{sen}(t + k\pi).$$

Como A es un período de $\operatorname{sen} t$, resulta que

$$\operatorname{sen}(t + k\pi) = \operatorname{sen} t$$

para cualquier t. Si $k = 0$, esta condición se cumple; en cambio, si $k = 1$, no puede cumplirse idénticamente ya que $\operatorname{sen}(t + \pi) = -\operatorname{sen} t$. Obtenemos, en definitiva, que $k = 0$, o sea, $A = 2p\pi$ que es lo que queríamos demostrar.

Análogamente se demuestra que cualquier período de $\cos t$ es un múltiplo entero de 2π.

Resumiendo, se puede afirmar que, al estudiar las funciones circulares, el paso a la variable compleja no conduce a la aparición de períodos nuevos.

Distinto es el caso de las funciones hiperbólicas. Para alcanzar cuanto antes el objetivo, recurriremos a las fórmulas (52) y (71):

$$\operatorname{sen}(it) = i \operatorname{sh} t \qquad \text{y} \quad \cos(it) = \operatorname{ch} t$$

o

$$\operatorname{sh} t = -i \operatorname{sen}(it) \quad \text{y} \qquad \operatorname{ch} t = \cos(it).$$

De aquí, para cualquier número complejo A,

$$\operatorname{sh}(t + A) = -i \operatorname{sen}(it + iA) \text{ y } \operatorname{ch}(t + A) = \cos(it + iA).$$

Por eso, A es un período de las funciones hiperbólicas si, y sólo si, iA es un período de las funciones circulares, o sea, $iA = 2p\pi$, donde p es un número entero, o $A = (-p)2\pi i = 2\pi i p'$, donde $p' = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Por consiguiente, las funciones hiperbólicas $\operatorname{sh} t$ y $\operatorname{ch} t$ son funciones periódicas y sus períodos quedan abarcados en la fórmula $A = 2p'\pi i$, donde p' es un número entero cualquiera.

Vemos que el paso a la variable compleja ha descubierto la periodicidad de las funciones hiperbólicas (éstas no son periódicas si se consideran como funciones de variable real).

37. Aunque los períodos $2p\pi$ de las funciones circulares son números reales mientras que los períodos $2p'\pi i$ de las funciones hiperbólicas son números imaginarios puros (todos, a excepción de uno que es igual a cero), lo común de ambos casos es que cualquier período de la función es un múltiplo entero de un mismo número. Este número es 2π (o -2π) para las funciones circulares y $2\pi i$ (o $-2\pi i$) para las funciones hiperbólicas. Una función periódica tal que cualquier período suyo es múltiplo entero de un mismo período, llamado *período primitivo*, se denomina *función uniperiódica* o *función simplemente periódica*. De modo que las funciones circulares e hiperbólicas son funciones uniperiódicas.

Consideremos las funciones lemniscáticas y comencemos de nuevo por el seno. Observando que $\operatorname{sl}\omega = 0$ y $\operatorname{cl}\omega = \operatorname{sl}\left(\frac{\omega}{2} - \omega\right) = \operatorname{sl}\left(-\frac{\omega}{2}\right) = -\operatorname{sl}\frac{\omega}{2} = -1$, obtenemos de la primera de las expresiones (87):

$$\operatorname{sl}(t + \omega) = -\operatorname{sl} t. \qquad (134)$$

Vemos que ω no es período de sl t. De la fórmula (134) se deduce seguidamente:

$$\mathrm{sl}\,(t + 2\omega) = \mathrm{sl}\,[(t + \omega) + \omega] = -\mathrm{sl}\,(t + \omega) = \mathrm{sl}\,t. \qquad (135)$$

Por eso 2ω es un periodo del seno lemniscático (este hecho se ha señalado ya en el punto 25) y cualquier múltiplo entero de 2ω también es un periodo. Sin embargo, los períodos de tipo $2n\omega$ no abarcan todos los períodos de sl t. Para persuadirnos de ello, observemos que $\mathrm{sl}\,(\omega i) = i\,\mathrm{sl}\,\omega = 0$ y $\mathrm{cl}\,(\omega i) = \frac{1}{\mathrm{cl}\,\omega} = -1$; poniendo $\alpha = t$ y $\beta = i\omega$ en la primera de las expresiones (87), obtenemos:

$$\mathrm{sl}\,(t + \omega i) = -\mathrm{sl}\,t. \qquad (136)$$

De aquí se deduce que ωi no es un periodo de sl t; pero de esta misma fórmula (136) deducimos que

$$\mathrm{sl}\,(t + 2\omega i) = \mathrm{sl}\,[(t + \omega i) + \omega i] = -\mathrm{sl}\,(t + \omega i) = \mathrm{sl}\,t, \qquad (137)$$

o sea, $2\omega i$ y, por consiguiente, cualquier múltiplo entero de $2\omega i$ es un período de sl t. De modo que el seno lemniscático tiene un conjunto infinito de periodos reales y un conjunto infinito de períodos imaginarios puros. De ello se deduce que sl t, siendo una función periódica, no es una función uniperiódica. Efectivamente, si se supone que *cualquier periodo suyo* es un múltiplo entero del período primitivo α ($\alpha \neq 0$), deben cumplirse las igualdades de tipo

$$2\omega = m\alpha \quad \text{y} \quad 2\omega i = n\alpha,$$

donde m y n son números enteros (distintos de cero).

De aquí resultaría que

$$i = \frac{n}{m}$$

es un número real lo que es falso. De modo que sl t pertenece a una clase especial de funciones periódicas, distintas de las uniperiódicas.

Empleando las fórmulas (134) y (136), deducimos que

$$\mathrm{sl}\,(t + \omega + i\omega) = \mathrm{sl}\,[(t + i\omega) + \omega] = -\mathrm{sl}\,(t + i\omega) = \mathrm{sl}\,t.$$

Por eso, $\omega + i\omega$ es un período de sl t y también lo es cualquier múltiplo entero de $\omega + i\omega$.

38. Por medio de adición se pueden obtener de los periodos encontrados otros nuevos.

Por ejemplo, puesto que $2m\omega$ es un periodo de sl t (m es un entero) y $n(\omega + i\omega)$ también es un período de sl t (n es un entero); se deduce que

$$2m\omega + n(\omega + \omega i) \tag{138}$$

también es un periodo de sl t.

Demostremos ahora que todo periodo A de la función sl t se puede representar en la forma (138) para determinados valores enteros de m y n. Por supuesto, esto es evidente para los periodos que hemos encontrado anteriormente:

$$2\omega = 2 \cdot 1 \cdot \omega + 0 \cdot ((\omega + \omega i), \qquad (m = 1,\ n = 0);$$

$$2\omega i = 2 \cdot -1 \cdot \omega + 2 \cdot (\omega + \omega i), \quad (m = -1,\ n = 2);$$

$$\omega + \omega i = 2 \cdot 0 \cdot \omega + 1 \cdot (\omega + \omega i), \qquad (m = 0,\ n = 1).$$

Pero nuestra proposición tiene un carácter general: de ella se deducirá que sl t no tiene más periodos que los comprendidos en la fórmula (138).

Supongamos, pues, que tenemos la identidad

$$\mathrm{sl}(t + A) = \mathrm{sl}\, t. \tag{139}$$

Poniendo aqui $t = 0$, encontraremos:

$$\mathrm{sl}\, A = 0,$$

de donde se deduce que A es un cero de la función sl t, o sea, (véase (128))

$$A = m\omega + n\omega i,$$

donde m y n son unos números enteros. Representemos A en la forma:

$$A = (m - n)\,\omega + n(\omega + \omega i) = p\omega + n(\omega + \omega i)$$

y sea k el resto de la división de p por 2: $p = 2r + k$ (r es un número entero y $k = 0$ ó 1). Entonces

$$A = 2r\omega + n(\omega + \omega i) + k\omega;$$

introduciendo este valor en (139) y observando que $2r\omega + n(\omega + \omega i)$ es un período de tipo (138), deducimos que

$$\mathrm{sl}(t + k\omega) = \mathrm{sl}\, t$$

idénticamente.

La última condición se satisface sólo para uno de los dos valores posibles de k, a saber, para $k = 0$ ($k = 1$ no sirve, como puede verse de la fórmula (134)).

Luego, cualquier período A de la función sl t tiene la forma:

$$A = 2r\omega + n(\omega + \omega i)$$

que es lo que se quería demostrar.

El análisis realizado ha permitido ver que cualquier período de sl t se puede representar como una combinación con coeficientes enteros de los dos períodos primitivos 2ω y $\omega + \omega i$. Las funciones periódicas que poseen semejante propiedad se denominan *doblemente periódicas*. De modo que sl t es una función doblemente periódica con dos períodos primitivos 2ω y $\omega + \omega i$ (compruébese que también se pueden tomar como períodos primitivos de esta función, por ejemplo, $\omega - \omega i$ y $\omega + \omega i$).

Empleando la fórmula

$$\operatorname{cl} t = \operatorname{sl}\left(\frac{\omega}{2} - t\right),$$

el lector deducirá fácilmente de lo demostrado que cl t es también una función doblemente periódica con los mismos períodos primitivos.

39. Un análisis análogo se puede realizar para las funciones de Jacobi. Consideremos, por ejemplo, $\operatorname{sn}(t, k)$. En el punto 28 quedó demostrado que

$$\operatorname{sn}(t + 2K) = -\operatorname{sn} t,$$

de donde se deduce que

$$\operatorname{sn}(t + 4K) = \operatorname{sn} t,$$

o sea, que $4K$ es un período (real) de sn t. Mostremos que sn t tiene también períodos imaginarios. De la fórmula (131) que determina todos los ceros de $\operatorname{sn}(t, k)$, vemos que $t = 2iK'$ también es un cero, o sea,

$$\operatorname{sn}(2iK', k) = 0. \tag{140}$$

Después, de las fórmulas (94) y (95) obtenemos para $t = 2K'$:

$$\operatorname{cn}(2iK', k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(2K', k')}, \quad \operatorname{dn}(2iK', k) = \frac{\operatorname{dn}(2K', k')}{\operatorname{cn}(2K', k')}. \tag{141}$$

Pero de las fórmulas (109) se deduce para $t = 0$:

$$\operatorname{cn}(2K,\ k) = -\operatorname{cn} 0 = -1 \quad \text{y} \quad \operatorname{dn}(2K,\ k) = \operatorname{dn} 0 = 1$$

o, sustituyendo k por k' y, por consiguiente.

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \text{ por } K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}},$$

$$\operatorname{cn}(2K',\ k') = -1 \quad \text{y} \quad \operatorname{dn}(2K',\ k') = 1.$$

Por eso, las fórmulas (141) dan:*

$$\operatorname{cn}(2iK',\ k) = -1 \quad \text{y} \quad \operatorname{dn}(2iK',\ k') = 1; \tag{142}$$

Poniendo $\alpha = t$ y $\beta = 2iK'$ en la primera de las expresiones (96), obtenemos mediante (140) y (142):

$$\operatorname{sn}(t + 2iK',\ k) = \operatorname{sn}(t,\ k)\operatorname{cn}(2iK',\ k)\operatorname{dn}(2iK',\ k) = \operatorname{sn}(t,\ k), \tag{143}$$

de donde resulta que $2iK'$ es un período de $\operatorname{sn}(t,\ k)$.

De lo expuesto en este punto se deduce que

$$A = 4Km + 2iK'n, \tag{144}$$

donde m y n son números enteros cualesquiera, es un período de $\operatorname{sn}(t,\ k)$. Mostremos que los números (144) abarcan todos los períodos posibles de $\operatorname{sn}(t,\ k)$. Aquí se puede razonar igual que en el caso del seno lemniscático (punto 37). Sea A un período cualquiera de $sn(t,\ k)$. Entonces

$$\operatorname{sn}(t + A) = \operatorname{sn} t \tag{145}$$

idénticamente. Poniendo aquí $t = 0$, encontraremos

$$\operatorname{sn} A = 0,$$

o sea, A es un cero de la función $\operatorname{sn} t$; por eso, (véase (131))

$$A = 2mK + 2iK'n,$$

donde m y n son unos números enteros. Indiquemos por r el resto de la división de m por 2:

$$m = 2p + r$$

(p es un número y $r = 0$ ó 1). Entonces

$$A = 4pK + 2niK' + 2rK.$$

Introduciendo en (145) y observando que $4pK + 2niK'$ es un

periodo, encontraremos:

$$\operatorname{sn}(t + 2rK) = \operatorname{sn} t.$$

Esta relación no puede cumplirse idénticamente si $r = 1$ ya que $\operatorname{sn}(t + 2K) = -\operatorname{sn} t$; por eso, $r = 0$, de donde

$$A = 4pK + 2niK'$$

que es lo que se quería demostrar.

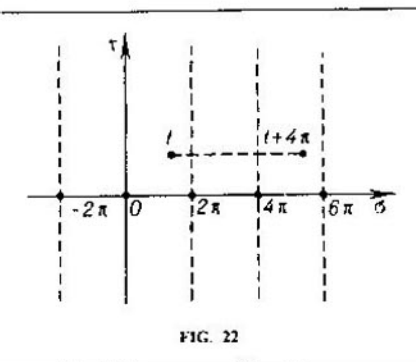


FIG. 22

De lo demostrado se deduce que $\operatorname{sn}(t, k)$ es una función doblemente periódica y que $4K$ y $2iK'$ pueden tomarse como períodos primitivos de la misma. Análogamente se puede demostrar que $\operatorname{cn}(t, k)$ es una función doblemente periódica de períodos primitivos $4K$ y $2K + 2iK'$ (también es cómodo tomar como períodos primitivos de $\operatorname{cn}(t, k)$ los números $2K - 2iK'$ y $2K + 2iK'$) y que $\operatorname{dn}(t, k)$ también es una función doblemente periódica de períodos primitivos $2K$ y $4iK'$.

40. Marquemos en el plano, cuyos puntos representan los números complejos (*plano complejo*), todos los períodos de $\operatorname{sen} t$ y tracemos por los puntos marcados rectas paralelas. Dividirán el plano en franjas (fig. 22) que se denominan *franjas de períodos*. Es evidente que dichas franjas cubren, sin dejar vacíos, todo el plano y no se superponen. La inclinación de las rectas puede ser cualquiera; optando por el caso más sencillo, trazamos todas las rectas paralelamente al eje imaginario. Si el punto t, desplazándose, describe una de las franjas de los períodos, el punto $t + 2p\pi$ (p es un entero), desplazándose de modo correspondiente, describe otra franja de períodos. Puesto que $\operatorname{sen} t$ toma valores iguales en

los puntos t y $t + 2p\pi$, todos los valores que toma el seno circular en una de las franjas se repiten en otra cualquiera. Por eso, digamos, para hallar las raíces de la ecuación

$$\operatorname{sen} t = A, \tag{146}$$

donde A es un número complejo fijo: $A = \alpha + i\beta$ (α y β son números reales), hasta hallar todas sus raíces pertenecientes a una de las franjas. Las demás raíces se obtendrán de las encontradas mediante desplazamientos: $t' = t + 2p\pi$ (p es un entero); ocupan en cada una de las franjas la misma posición que tienen las raíces encontradas en la franja inicial.

Mostremos que cualquiera que sea $A = \alpha + i\beta$ la ecuación (146) tiene en cada franja de períodos dos raíces, y sólo dos (que pueden confundirse en un punto, caso de *raíz múltiple*). Es necesario, entonces, convenir en asignar la recta, común a dos franjas vecinas, a una de estas franjas. A saber, asignaremos toda recta de este tipo a la franja que se encuentra a su derecha de modo que los puntos de la franja correspondiente serán caracterizados por las desigualdades:

$$2\pi p \leqslant \sigma < 2\pi(p+1) \quad (-\infty < \tau < +\infty).$$

Por ejemplo, los puntos $t = 0$ y $t = i$ pertenecen a la franja $0 \leqslant \sigma < 2\pi$, mientras que los puntos 2π y $2\pi + i$, a la franja siguiente a la derecha $2\pi \leqslant \sigma < 4\pi$. Representando $\operatorname{sen} t$ de acuerdo con la primera de las fórmulas (75), escribiremos la ecuación (146) en la forma:

$$\operatorname{sen}\sigma \cdot \operatorname{ch}\tau + i\cos\sigma \cdot \operatorname{sh}\tau = \alpha + i\beta. \tag{146'}$$

Queremos demostrar que existen sólo dos raíces $t = \sigma + i\tau$ que satisfacen la condición $0 \leqslant \sigma < 2\pi$. Es obvio que la ecuación (146′) equivale al siguiente sistema:

$$\operatorname{sen}\sigma \cdot \operatorname{ch}\tau = \alpha, \quad \cos\sigma \cdot \operatorname{sh}\tau = \beta. \tag{146''}$$

Pongamos $\operatorname{sen}\sigma = x$ y $\operatorname{sh}\tau = y$; entonces estas ecuaciones tomarán la forma: $x\sqrt{1+y^2} = \alpha$ y $\sqrt{1-x^2}\,y = \beta$

$$x^2 + x^2y^2 = \alpha^2 \quad \text{e} \quad y^2 - x^2y^2 = \beta^2. \tag{147}$$

Buscamos raíces reales de (146″); por eso, $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$ y $0 \leqslant y^2$. Estas condiciones se satisfacen sólo para los valores siguientes:

$$y^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1 + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{y} \quad x^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1 - \sqrt{\Delta}}{2}, \tag{148}$$

donde

$$\Delta = (\alpha^2 + \beta^2 - 1)^2 + 4\beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2 - 4\alpha^2 \qquad (149)$$

y $\sqrt{\Delta}$ significa el valor aritmético de la raíz cuadrada.

De (149) se ve inmediatamente que los valores encontrados no son negativos. Para comprobar que $x^2 \leqslant 1$, consideremos la diferencia $1 - x^2$:

$$1 - x^2 = \frac{\sqrt{\Delta} - (\alpha^2 + \beta - 1)}{2}.$$

De (149) se deduce que tampoco es negativa. La ecuación

$$y^2 = \text{sh}^2\,\tau = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1 + \sqrt{\Delta}}{2}$$

determina dos valores de τ que difieren sólo en el signo. Les corresponden dos valores opuestos del seno hiperbólico, $\text{sh}\,\tau$ y $-\text{sh}\,\tau$, y un mismo valor del coseno hiperbólico.

La ecuación

$$x^2 = \text{sen}^2\,\sigma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1 - \sqrt{\Delta}}{2}$$

se satisface para dos valores de $\text{sen}\,\sigma$; pero de éstos, como muestra la primera de las ecuaciones (146″) hay que tomar sólo aquel cuyo signo coincide con el de α (ya que $\text{ch}\,\tau \geqslant 1 > 0$); designemos por x_0 este único valor posible de $\text{sen}\,\sigma$:

$$\text{sen}\,\sigma = x_0, \quad |x_0| \leqslant 1.$$

Ahora bien, en el intervalo $0 \leqslant \sigma < 2\pi$ al valor encontrado de $\text{sen}\,\sigma$ le corresponden dos valores σ_1 y σ_2 de σ con la particularidad de que los correspondientes valores de $\cos\sigma_1$ y $\cos\sigma_2$ difieren en el signo: $\cos\sigma_1 = -\cos\sigma_2$.

Puesto que el producto $\cos\sigma \cdot \text{sh}\,\tau$ debe ser igual a β, resulta que el cambio de σ_1 por σ_2 en la segunda ecuación (146″) debe ir acompañado del cambio de un valor de τ por el opuesto $-\tau$. Hemos comprobado, pues, que existen dos pares de valores de σ y τ, y sólo dos pares, que satisfacen (146″) ó (146) dada la condición adicional $0 \leqslant \sigma < 2\pi$:

$$\sigma_1, \tau \quad \text{y} \quad \sigma_2, -\tau.$$

Los puntos correspondientes t son:

$$t_1 = \sigma_1 + i\tau \quad \text{y} \quad t_2 = \sigma_2 + i\tau. \tag{150}$$

Aquí σ_1 y σ_2 se determinan de las condiciones:

$$\operatorname{sen} \sigma_j = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1 - \sqrt{\Delta}}{2}}$$

donde el signo de $\operatorname{sen} \sigma_j$ coincide con el signo de α, $0 \leqslant \sigma_j < 2\pi$, $j = 1, 2$, mientras que $\pm\tau$ se determina de la condición

$$\operatorname{sh} \tau = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1 + \sqrt{\Delta}}{2}}.$$

No daremos las fórmulas explícitas para σ y τ aunque no es difícil hacerlo.

Observemos que para $\alpha > 0$ los puntos t_1 y t_2 serán simétricos respecto a $\frac{\pi}{2}$ y para $\alpha < 0$, serán simétricos respecto a $\frac{3\pi}{2}$.

Un análisis semejante podría realizarse también para el coseno circular $\left(\text{lo más sencillo es valerse de que } \cos t = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)$.

Señalemos brevemente cómo cambiarán los resultados si en lugar del seno circular se considera el seno hiperbólico. Aquí todos los períodos, a excepción del cero, son imaginarios puros:

$$0, \ \pm 2\pi i, \ \pm 4\pi i, \ \ldots$$

Por eso, aparecerán como franjas de períodos las franjas paralelas al eje real (fig. 23). De la relación

$$\operatorname{sen}(it) = i \operatorname{sh} t$$

se deduce que la ecuación

$$\operatorname{sh} t = A, \quad t = \sigma + i\tau, \quad 0 < \tau \leqslant 2\pi,$$

equivale a la ecuación

$$\operatorname{sen}(it) = \operatorname{sen}(-\tau + i\sigma) = \operatorname{sen}[(2\pi - \tau) + i\sigma] = iA,$$

donde $0 \leqslant \sigma' = 2\pi - \tau < 2\pi$, que hemos estudiado más arriba. Empleando el resultado encontrado para $\operatorname{sen} t$, obtendremos que la ecuación $\operatorname{sh} t = A$ cualquiera que sea el complejo A tiene dos raíces, y sólo dos, en cada una de las franjas de períodos del seno

hiperbólico (estas raíces pueden confundirse en una raíz de multiplicidad dos).

41. Marquemos en el plano todos los períodos del seno lemniscático:

$$2m\omega + n(\omega + i\omega), \quad m \text{ y } n \text{ son enteros.}$$

Partiendo de los períodos del seno circular (o hiperbólico), en el punto 40 hemos dividido el plano en franjas de períodos.

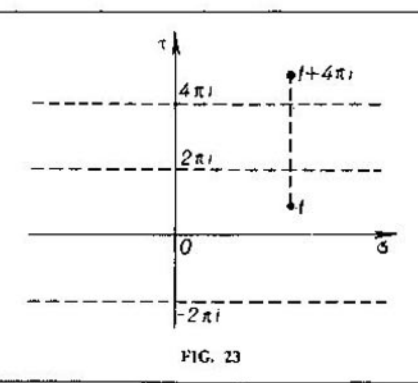


FIG. 23

Aquí, en el caso de una función doblemente periódica, en lugar de las franjas de períodos aparecen de un modo natural los *paralelogramos de períodos*. Una forma posible de escoger el sistema de los paralelogramos de períodos para $\operatorname{sl} t$ viene indicado en la fig. 24. Si el punto t describe uno de estos paralelogramos, el punto $t + 2m\omega + n(\omega + i\omega)$, donde m y n son unos números enteros fijos, describe otro paralelogramo. Puesto que $\operatorname{sl}[t + 2m\omega + n(\omega + i\omega)] = \operatorname{sl} t$, los valores que toma $\operatorname{sl} t$ en uno de los paralelogramos se repiten en otro cualquiera. Por eso, por ejemplo, para hallar las raíces de la ecuación

$$\operatorname{sl} t = A, \tag{151}$$

donde A es un número complejo dado: $A = \alpha + i\beta$, basta hallar todas sus raíces pertenecientes a uno de los paralelogramos, digamos, al paralelogramo con los vértices 0, 2ω, $2\omega + (\omega + i\omega)$, $\omega + i\omega$. Las demás raíces de la ecuación (151) se obtienen de las encontradas mediante desplazamientos $t' = t + 2m\omega + n(\omega + i\omega)$; ocupan en cada paralelogramo la misma posición que tienen las raíces encontradas al principio en el paralelogramo inicial.

Mostremos que cualquiera que sea $A = \alpha + i\beta$, la ecuación (151) tiene dos raíces, y sólo dos, en un paralelogramo (que pueden confundirse en un punto, caso de raiz múltiple). Es necesario, entonces, convenir en asignar a un sólo paralelogramo los puntos fronterizos comunes de varios paralelogramos. A saber, asignaremos

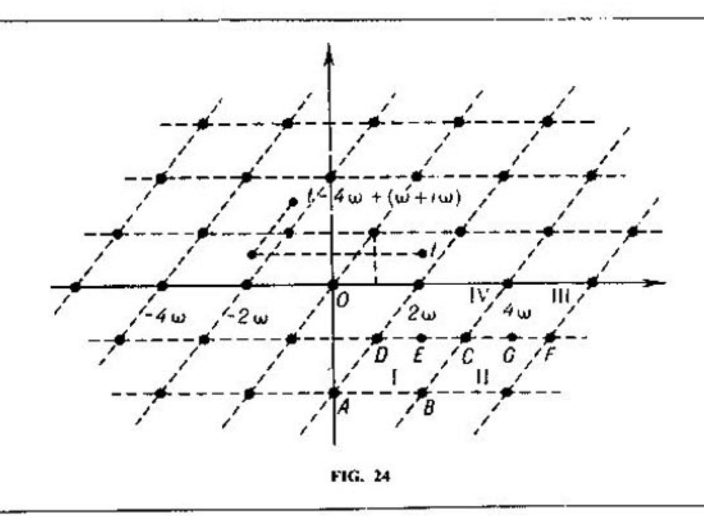


FIG. 24

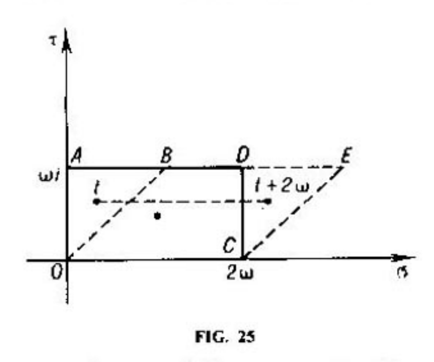


FIG. 25

a todo paralelogramo solamente los puntos pertenecientes a la base inferior (a excepción del extremo de la derecha) así como los puntos del lado lateral izquierdo (a excepción del extremo superior).

Consideremos, por ejemplo, los paralelogramos I, II, III y IV de la fig. 24; el punto A pertenece a I; B, a II; C y G, a III D y E, a IV.

Retornando al teorema enunciado más arriba, demostremos primero la proposición siguiente:

en el rectángulo $0 \leqslant \sigma < 2\omega$, $0 \leqslant \tau < \omega$ (fig. 25) *la ecuación* (151) *siempre tiene dos raíces, y sólo dos.*

De ella se deducirá precisamente la proposición enunciada al principio, ya que en el triángulo OAB, que no pertenece al paralelogramo $OBEC$, la función $\operatorname{sl} t$, debido a la periodicidad, toma los mismos valores que tiene en el triángulo CDE.

Expresando $\operatorname{sl} t = \operatorname{sl}(\sigma + i\tau)$ según la fórmula (89), sustituyamos (151) por el sistema equivalente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\operatorname{sl}\sigma \operatorname{cl}\tau (1 + \operatorname{sl}^2\tau)}{1 - \operatorname{sl}^2\sigma \operatorname{sl}^2\tau} &= \alpha, \\ \frac{\operatorname{sl}\tau \operatorname{cl}\sigma (1 + \operatorname{sl}^2\sigma)}{1 - \operatorname{sl}^2\sigma \operatorname{sl}^2\tau} &= \beta. \end{aligned}\right\} \tag{152}$$

Expresemos los valores de $\operatorname{cl}\sigma$ y $\operatorname{cl}\tau$ a través de $\operatorname{sl}\sigma$ y $\operatorname{sl}\tau$, respectivamente, empleando la fórmula (83), y pongamos $\operatorname{sl}\sigma = x$ y $\operatorname{sl}\tau = y$. Entonces el sistema tomará la forma:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x\sqrt{1 - y^4}}{\sqrt{1 - x^2y^2}} &= \alpha, \\ \frac{y\sqrt{1 - x^4}}{\sqrt{1 - x^2y^2}} &= \beta. \end{aligned}\right\} \tag{152'}$$

Buscamos exclusivamente soluciones reales de este sistema que cumplen las condiciones $|x| \leqslant 1$, $0 \leqslant y < 1$ (ya que $\operatorname{sl}\tau \geqslant 0$ para $0 \leqslant \tau < \omega$).

Elevando al cuadrado miembro por miembro cada una de las ecuaciones (152′) y sumándolas primero y dividiéndolas después. obtendremos el siguiente sistema:

$$x^2 + y^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(1 - x^2y^2),$$
$$\alpha^2y^2(1 - x^4) - \beta^2x^2(1 - y^4) = 0. \tag{153}$$

Observemos que se transforma en sí mismo si a la vez cambiamos de lugares x e y y α y β. Eliminando x^2 de (153), encontraremos

$$\beta^2y^8 - [(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 1]\,y^6 - 2(2\alpha^2 + \beta^2)\,y^4 + \\ + [(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 1]\,y^2 + \beta^2 = 0. \tag{154}$$

Dividiendo todos los términos por y^4, realicemos la sustitución:

$$\frac{1}{y^2} - y^2 = u;$$

obtendremos para u la ecuación cuadrada:

$$\beta^2 u^2 + [(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 1]\, u - 4\alpha^2 = 0. \tag{155}$$

Puesto que por las condiciones del problema se admiten sólo valores de y que son reales y no mayores de 1 en cuanto al valor absoluto, resulta que $u = \dfrac{1}{y^2} - y^2$ debe ser un número no negativo. Por eso, de (155) obtenemos sólo un valor admisible de u:

$$u = \frac{\sqrt{[(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 1]^2 + 16\alpha^2\beta^2} - [(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 1]}{2\beta^2} \geqslant 0. \tag{156}$$

Ahora para determinar y tenemos la ecuación

$$y^4 + uy^2 - 1 = 0. \tag{157}$$

También aquí para y^2 sirve sólo una raíz, la positiva. Obviamente, es la menor en cuanto al valor absoluto de las dos raíces (porque la suma de los dos valores posibles de y^2, igual a $-u$, no es positiva) y, por consiguiente, no pasa de la unidad:

$$0 \leqslant y^2 = \frac{\sqrt{u^2 + 4} - u}{2} \leqslant 1. \tag{158}$$

Como $y = \operatorname{sl} \tau \geqslant 0$ $(0 \leqslant \tau < \omega)$, encontramos de aquí un único valor de y.

Empleando la simetría del sistema (153) subrayada anteriormente, obtenemos de un modo análogo, poniendo $\dfrac{1}{x^2} - x^2 = v$:

$$v = \frac{\sqrt{[(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 1]^2 + 16\alpha^2\beta^2} - [(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 1]}{2\alpha^2} \geqslant 0 \tag{159}$$

y un único valor posible para x^2:

$$0 \leqslant x^2 = \frac{\sqrt{v^2 + 4} - v}{2} \leqslant 1. \tag{160}$$

A partir del valor encontrado para $y = \mathrm{sl}\,\tau$:

$$0 \leqslant y = \sqrt{\frac{\sqrt{u^2-4}-u}{2}} \leqslant 1$$

encontramos en el intervalo $0 \leqslant \tau < \omega$ dos valores τ_1 y τ_2 de τ, siendo ambos valores simétricos respecto a $\frac{\omega}{2}$:

$$0 \leqslant \tau_1 = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \leqslant \frac{\omega}{2}, \quad \tau_2 = \omega - \tau_1 \geqslant \frac{\omega}{2}.$$

Observemos que los correspondientes valores $\mathrm{cl}\,\tau_1$ y $\mathrm{cl}\,\tau_2$ son recíprocamente opuestos (véase el punto 5). Supongamos, para concretar, que $y = \mathrm{cl}\,\tau_1 = \mathrm{sl}\,\tau_2 > 0$ (proponemos al lector analizar el caso $y = 0$). Entonces de la segunda ecuación del sistema (152) se deduce que el signo de $\mathrm{cl}\,\sigma$ coincide con el signo de β. Por eso, de los dos posibles valores σ_1 y σ_1' tales que

$$\mathrm{sl}\,\sigma_1 = \mathrm{sl}\,\sigma_1' = \sqrt{\frac{\sqrt{v^2+4}-v}{2}},$$

$\sigma_1 \geqslant 0$, $\sigma \ \geqslant 0$, $\sigma_1 + \sigma_1' = \omega$, hay que escoger sólo uno; sea éste el valor σ_1 que satisface la condición: los signos de $\mathrm{cl}\,\sigma_1$ y de β son iguales. De un modo análogo escogemos uno de los dos valores σ_2 y σ_2' tales que

$$\mathrm{sl}\,\sigma_2 = \mathrm{sl}\,\sigma_2' = -\sqrt{\frac{\sqrt{v^2+4}-v}{2}},$$

$\omega \leqslant \sigma_2$, $\omega \leqslant \sigma_2'$, $\sigma_2 + \sigma_2' = 3\omega$; sea éste el valor σ_2 que satisface la condición: los signos de $\mathrm{cl}\,\sigma_2$ y de β son iguales.

De lo expuesto en el punto 5 se puede ver que $\sigma_1 + \sigma_2 = 2\omega$ (partimos de que $0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \omega$, $\omega \leqslant \sigma_2 \leqslant 2\omega$, $\mathrm{sen}\,\sigma_1 = -\mathrm{sen}\,\sigma_2$ y $\mathrm{cl}\,\sigma_1 = \mathrm{cl}\,\sigma_2$).

En resumen, hemos probado que al sistema (152) le pueden satisfacer, dadas las condiciones $0 \leqslant \sigma < 2\omega$ y $0 \leqslant \tau < \omega$, sólo dos valores τ_1 y τ_2 de τ tales que

$$\mathrm{sl}\,\tau_1 = \mathrm{sl}\,\tau_2 = y > 0, \quad 0 < \mathrm{cl}\,\tau_1 = -\mathrm{cl}\,\tau_2 \ (\tau_1 + \tau_2 = \omega)$$

y dos valores σ_1 y σ_2 tales que

$$\operatorname{sl}\sigma_1 = -\operatorname{sl}\sigma_2 > 0, \quad \operatorname{cl}\sigma_1 = \operatorname{cl}\sigma_2 \quad (\sigma_1 + \sigma_2 = 2\omega),$$

con la particularidad de que el signo de $\operatorname{cl}\sigma_1$ (y de $\operatorname{cl}\sigma_2$) coincide con el signo de β.

Como de la primera ecuación del sistema (152) se deduce que el signo de $\operatorname{sl}\sigma \cdot \operatorname{cl}\tau$ coincide con el signo de α, resulta que los signos de $\operatorname{sl}\sigma$ y $\operatorname{cl}\tau$ deben ser iguales (si $\alpha > 0$) u opuestos (si $\alpha < 0$). Esto significa que el valor σ_1 es compatible sólo con uno de los dos valores τ_1 y τ_2; a saber: con τ_1 si $\alpha > 0$ y con τ_2 si $\alpha < 0$; respectivamente, el valor σ_2 es compatible con τ_2 o con τ_1.

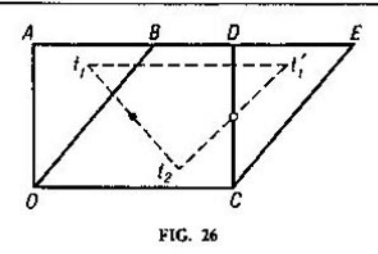


FIG. 26

En resumidas cuentas, en el rectángulo $0 \leqslant \sigma < 2\omega$, $0 \leqslant \tau < \omega$ existen dos puntos t_1 y t_2, y sólo dos puntos, que satisfacen la ecuación (151). En cada uno de los casos posibles:

$$t_1 = \sigma_1 + i\tau_1, \quad t_2 = \sigma_2 + i\tau_2 = (2\omega - \sigma_1) + i(\omega - \tau_1) \quad (\alpha > 0),$$

$$t_1 = \sigma_1 + i\tau_2, \quad t_2 = \sigma_2 + i\tau_1 = (2\omega - \sigma_1) + i(\omega - \tau_2) \quad (\alpha < 0)$$

los puntos t_1 y t_2 están situados simétricamente respecto al centro $\omega + \dfrac{i\omega}{2}$ del rectángulo.

Si ambos puntos no pertenecen simultáneamente al paralelogramo *OBEC*, uno de ellos, por ejemplo t_1, pertenece al triángulo *OAB* y el otro, t_2, al paralelogramo *OBEC* (fig. 26).

Pero en este caso el punto $t_1' = t_1 + 2\omega$ aparece en *OBEC* y nuevamente obtenemos en este paralelogramo dos raíces de la ecuación (151), esta vez simétricas respecto al punto $2\omega + \dfrac{i\omega}{2}$.

42. Un análisis semejante podría realizarse también para las funciones de Jacobi de módulo cualquiera. Podríamos persuadirnos

entonces de que para cualquier A cada una de las ecuaciones de tipo:

$$\mathrm{sn}(t, k) = A, \quad \mathrm{cn}(t, k) = A, \quad \mathrm{dn}(t, k) = A$$

tiene dos raíces, y sólo dos, (que pueden confundirse en una raíz múltiple) en el correspondiente paralelogramo de períodos. Pero esta demostración exigiría cálculos voluminosos y no la haremos.

Preferimos concluir nuestra exposición con un breve resumen de las definiciones y propiedades generales de las funciones elípticas que representan una generalización sucesiva de las funciones aquí estudiadas. Se tomará por base el concepto de función entera de variable compleja [1].

Una función $f(t)$ de variable compleja se denomina *entera si* está definida y es diferenciable en todo el plano complejo. Como ejemplos de funciones enteras pueden servir cualquier polinomio, la función exponencial (e^t), las funciones circulares ($\mathrm{sen}\, t$ y $\cos t$), etc. Se puede demostrar que la clase de funciones enteras coincide con la clase de funciones representables mediante series de potencias que convergen en todo punto:

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots + a_n t^n + \ldots$$

Una función $\varphi(t)$ de variable compleja se denomina *fraccionaria* (*o meromorfa*, de las palabras griegas meros y morfos que significan fracción y forma) si se puede representar como cociente de dos funciones enteras:

$$\varphi(t) = \frac{g(t)}{h(t)}.$$

Son ejemplos de funciones fraccionarias cualquier función racional (cociente de dos polinomios), las funciones $\sec t = \dfrac{1}{\cos t}$, $\mathrm{tg}\, t = \dfrac{\mathrm{sen}\, t}{\cos t}$. Resulta que $\mathrm{sl}\, t$, $\mathrm{cl}\, t$, $\mathrm{sn}(t, k)$, $\mathrm{cn}(t, k)$ y $\mathrm{dn}(t, k)$ también son funciones fraccionarias. Sin embargo, esta afirmación requiere una demostración especial y no se deduce directamente del hecho de que estas funciones se representan mediante fracciones de tipo (89), (90), (100) y (101). El hecho es que los numeradores y denominadores de estas fracciones no son funciones enteras de la variable compleja $t = \sigma + i\tau$. La demostra-

[1] Véase nuestro libro «Целые функции. Элементарный очерк», Наука, Москва, 1965 («Funciones enteras. Ensayo elemental»).

ción de que las funciones lemniscáticas y de Jacobi se pueden representar como cocientes de funciones enteras y la determinación de estas funciones enteras, es una cuestión especial que rebasa los márgenes de nuestro libro. Desde luego, toda función entera $f(t)$ se puede considerar como un caso particular de la fraccionaria puesto que $f(t) = \frac{f(t)}{1}$. Pero tal función tiene valores finitos para todos los t sin excepción, mientras que la función fraccionaria $\varphi(t) = \frac{g(t)}{h(t)}$ tiene, en general, polos en los que se convierte en ∞. Es evidente que todo punto $t = t_0$ en el cual $h(t_0) = 0$ y $g(t_0) = 0$ es un polo de la función fraccionaria.

Una función fraccionaria doblemente periódica se denomina *elíptica.* Vemos ahora que las funciones lemniscáticas y las funciones de Jacobi son elípticas.

Uno de los teoremas principales de la teoría de funciones elípticas afirma que toda función elíptica, distinta de una constante, debe tener no menos de dos polos (que pueden confundirse en un polo múltiplo) en cualquiera de sus paralelogramos de períodos. De aquí se deduce, en particular, que ninguna función entera, que no sea igual idénticamente a una constante, puede ser elíptica (o sea, doblemente periódica).

Denominemos el número de polos de la función elíptica en el paralelogramo de períodos *orden* de la función elíptica. Las funciones elípticas de Jacobi $\operatorname{sn}(t, k)$, $\operatorname{cn}(t, k)$ y $\operatorname{dn}(t, k)$ (en particular, las funciones lemniscáticas $\operatorname{sl} t$ y $\operatorname{cl} t$) son funciones de segundo orden.

Teniendo funciones elípticas de los mismos períodos primitivos $2\omega_1$ y $2\omega_2$ y realizando con ellas cualesquiera operaciones racionales — adición, sustracción, multiplicación y división — obtendremos nuevamente funciones elípticas de los mismos períodos. Por esta vía se pueden obtener funciones elípticas de órdenes tan grandes como se quiera.

Si el orden de la función $f(t)$ es p ($p \geqslant 2$), se puede demostrar que la ecuación

$$f(t) = A$$

para cualquier A complejo tiene un mismo número p de raíces en cualquier paralelogramo de períodos (entre las raíces pueden haber múltiples).

Vemos que los teoremas sobre el número de raíces de las ecuaciones

$$\mathrm{sl}\, t = A,\ \mathrm{cl}\, t = A,\ \mathrm{sn}(t,\ k) = A,\ \mathrm{cn}(t,\ k) = A \text{ y } \mathrm{dn}(t,\ k) = A$$

en el paralelogramo de períodos son casos particulares de una regularidad general.

Sin detenernos en otras propiedades de las funciones elípticas, señalemos para concluir que toda función elíptica posee el teorema algebraico de adición. Weierstrass demostró que es válido el teorema inverso en cierto sentido del anterior: si una función fraccionaria $\varphi(t)$ posee el teorema algebraico de adición y $\varphi(t)$ no es racional respecto a t o respecto a la función exponencial de tipo $e^{\alpha t}$ (α es una constante compleja), entonces es necesariamente una función elíptica (véase, por ejemplo, nuestro libro mencionado en la pág. 190).

Todos los senos maravillosos, estudiados aquí, poseen el teorema de adición. Son funciones elípticas (como $\mathrm{sl}\, t$ y $sn(t,\ k)$) o funciones racionales de la exponencial $\left(\text{como } \mathrm{sen}\, t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right.$ y $\left.\mathrm{sh}\, t = \dfrac{e^{t} - e^{-t}}{2}\right)$.

Estos resultados se pueden considerar como una confirmación del teorema de Weierstrass.

A NUESTROS LECTORES:

Lecciones populares de matemáticas

Obras de nuestro sello editorial

A.N. Kostovski

Construcciones geométricas mediante un compás

A.O. Guelfond

Resolución de ecuaciones en números enteros

A.S. Smogorzhevski

Acerca de la geometría de Lobachevski

G.E. Shílov

Anáisis matemático en el campo

de funciones racionales

Editorial MIR  Moscú